

**Objetivos deste texto:**

- Apresentar a teoria básica sobre cálculo da incerteza de resultados experimentais
- Apresentar exemplo de cálculo
- Exercícios de aplicação da teoria

**TEORIA BÁSICA**

A teoria abaixo é baseada nas seguintes referências:

ABNT. **Guia para expressão da incerteza de medição**. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Normas Técnicas, 1997.

JHT. **ASME Journal of Heat Transfer policy on reporting uncertainties in experimental measurements and results**, v. 115, p. 5-6, 1993.

**Valor médio (Ymed):**

$$Y_{med} = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i}{N} \quad (1)$$

onde

$Y_i$  = valor de cada medida  $i$

$N$  = número total de medidas

$i$  = o número de cada medida

$\Sigma$  = somatório

$Y_{med}$  = valor médio ou média aritmética dos  $N$  valores de  $Y_i$

**Desvio padrão ou incerteza padronizada (u):**

$$u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - Y_{med})^2}{N - 1}} \quad (2)$$

**Graus de liberdade (v):**

$$v = N - 1 \quad (3)$$

**Fator de abrangência (k):**

$$k = \text{função de } v, \text{ do nível de confiança } p \text{ e da distribuição } t \quad (4)$$

onde a Tabela 1 apresenta o valor de k para cada v e nível de confiança.

O valor de v está associado ao número de medidas (N).

O nível de confiança é definido pelo usuário da tabela; a ASME (*American Society of Mechanical Engineers*) recomenda o uso de  $p = 95\%$ .

**Incerteza expandida absoluta (U):**

$$U = uk \quad (5)$$

**Incerteza expandida percentual (U%):**

$$U\% = 100 \frac{U}{Y_{med}} \quad (6)$$

**Valor mínimo esperado (YminU):**

$$Y_{min} = Y_{med} - U \quad (7)$$

**Valor máximo esperado (YmaxU):**

$$Y_{max} = Y_{med} + U \quad (8)$$

**Valor mínimo real (YminR):**

é o menor valor entre todos os valores de  $Y_i$ .

### Valor máximo real (YmaxR):

é o maior valor entre todos os valores de  $Y_i$ .

**Tabela 1. Fator de abrangência k (Fonte: ABNT, 1997).**

**Tabela G.2 - Valor de  $t_p(v)$  a partir da distribuição-t para graus de liberdade  $v$  que define um intervalo  $-t_p(v)$  to  $+ t_p(v)$  que abrange a fração  $p$  da distribuição**

Graus de liberdade $v$	Fração $p$ em por cento					
	68,27 <sup>(a)</sup>	90	95	95,45 <sup>(a)</sup>	99	99,73 <sup>(a)</sup>
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,39	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
$\infty$	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

<sup>(a)</sup> Para a grandeza  $z$  descrita por uma distribuição normal com esperança  $\mu_z$  e desvio padrão  $\sigma$ , o intervalo  $\mu_z + k\sigma$  abrange  $p = 68,27, 95, 45$  e  $99,73$  por cento da distribuição para  $k = 1, 2, e 3$ , respectivamente.

### **Apresentação do resultado:**

O resultado de uma análise de incerteza pode ser apresentado da seguinte forma:

$$Y = Y_{med} \pm U \quad (9)$$

onde  $U$  deve ser apresentado com dois algarismos significativos, e o número de algarismos de  $Y_{med}$  deve ser compatível com a precisão de  $U$ . Tanto em  $Y_{med}$  quanto em  $U$  devem ser feitos arredondamentos.

### **Interpretação:**

Considerando-se um conjunto de  $N$  medidas  $Y_i$ , de uma variável  $Y$ , espera-se que uma nova medida esteja entre  $Y_{minU}$  e  $Y_{maxU}$  com probabilidade  $p$ . Por exemplo, para  $p = 95\%$ , 19 entre 20 novas medidas deverão estar entre  $Y_{minU}$  e  $Y_{maxU}$ , e apenas uma não.

### **Motores certificados pela NAR:**

O processo de certificação de motores-foguete de espaçomodelos pela NAR (*National Association of Rocketry*), dos Estados Unidos, considera  $N \rightarrow \infty$ , isto é, um número infinito de medidas, e nível de confiança  $p = 68,27\%$ . Desta forma,  $U = u$ , que é o desvio padrão. Nos registros de motores certificados pela NAR, em vez de  $U$  ou  $u$  usa-se o símbolo  $\sigma$ .

## **EXEMPLOS DE CÁLCULO**

Na Tabela 2 são apresentados resultados do cálculo de incertezas e seus parâmetros relacionados. Os exemplos referem-se a motores-foguete do tipo A6-0 fabricados em outubro de 2008 pela Bandeirante (Boa Vista Modelismo Ltda.), de São Lourenço da Mata (PE). Foram testados seis motores ( $N=6$ ) em 27 de novembro de 2008, na Universidade Federal do Paraná.

A Tabela 2 apresenta seis resultados para três tipos de variáveis ( $Y$ ): (1)  $t_q$  = tempo de queima do motor, em segundos (s); (2)  $I_t$  = impulso total do motor, em newton-segundo (N.s); e  $E_{max}$  = empuxo máximo do motor, em newton (N).

Tabela 2. Exemplos de cálculo de incertezas.

<b>Motor</b>	<b>tq (s)</b>	<b>It (N.s)</b>	<b>Emax (N)</b>
BT-7	0,630	1,61	4,01
BT-8	0,612	1,68	5,16
BT-9	0,524	1,46	4,77
BT-10	0,619	1,87	4,96
BT-11	0,588	1,81	5,40
BT-12	0,576	1,70	4,44
<b>Média (Ymed)</b>	<b>0,5915</b>	<b>1,6883</b>	<b>4,7900</b>
Incerteza padronizada (u)	0,0386	0,1458	0,5038
Graus de liberdade (v)	5	5	5
Fator de abrangência (k)	2,57	2,57	2,57
<b>Incerteza expandida (U)</b>	<b>0,0993</b>	<b>0,3748</b>	<b>1,2948</b>
<b>U (%) de Ymed</b>	<b>16,79</b>	<b>22,20</b>	<b>27,03</b>
Valor mínimo esperado (YminU)	0,4922	1,3136	3,4952
Valor máximo esperado (YmaxU)	0,6908	2,0631	6,0848
<b>Resultado final (Y)</b>	<b>0,592 ± 0,099</b>	<b>1,69 ± 0,37</b>	<b>4,8 ± 1,3</b>
Valor mínimo real (YminR)	0,524	1,46	4,01
Valor máximo real (YmaxR)	0,630	1,87	5,40

### Planilha de cálculo:

O arquivo “Planilha\_para\_calculo\_de\_incerteza\_2014-2.xlsx”, do aplicativo Excel, foi usado para gerar os resultados mostrados na Tabela 2. Esta planilha pode ser usada para aplicar o procedimento descrito neste texto para cálculo de incertezas e seus parâmetros. Para isso, basta mudar os valores das medidas, acrescentar ou reduzir o número de medidas, e adaptar o resultado final.

## EXERCÍCIOS

Considerando o motor Quest A6-4, certificado pela NAR em 07-August-11, com resultados de 10 motores:

- [1] Calcular o impulso total (*Total Impulse*) médio. O resultado a obter deve ser 2,303 N.s.
- [2] Calcular o desvio padrão absoluto e percentual do impulso total. Os resultados a obter devem ser 0,028 N.s e 1,2%.
- [3] Calcular a incerteza expandida (U) absoluta e percentual do impulso total. Os resultados a obter devem ser 0,064 N.s e 2,8%.

- [4] Calcular o empuxo máximo (*Max Thrust*) médio. O resultado a obter deve ser 10,07 N.
- [5] Calcular o desvio padrão absoluto e percentual do empuxo máximo. Os resultados a obter devem ser 0,14 N e 1,4%.
- [6] Calcular a incerteza expandida (U) absoluta e percentual do empuxo máximo. Os resultados a obter devem ser 0,33 N e 3,2%.
- [7] Calcular o valor médio do empuxo médio (*Avg Thrust*) médio. O resultado a obter deve ser 4,155 N.
- [8] Calcular o desvio padrão absoluto e percentual do empuxo médio. Os resultados a obter devem ser 0,074 N e 1,8%.
- [9] Calcular a incerteza expandida (U) absoluta e percentual do empuxo médio. Os resultados a obter devem ser 0,17 N e 4,0%.
- [10] Calcular o tempo de queima (*Burn Time*) médio. O resultado a obter deve ser 0,5550 s.
- [11] Calcular o desvio padrão absoluto e percentual do tempo de queima. Os resultados a obter devem ser 0,0097 s e 1,8%.
- [12] Calcular a incerteza expandida (U) absoluta e percentual do tempo de queima. Os resultados a obter devem ser 0,022 s e 4,0%.