

Capítulo 5.

Trajectoria de foguetemodelo

Curitiba, 7 Fev 2020.

Curso: Projeto e Teste de Minifoguete

Prof. Carlos Henrique Marchi

Grupo de Foguetes Carl Sagan (GFCS)

Laboratório de Atividades Espaciais (LAE)

Departamento de Engenharia Mecânica (DEMEC)

Setor de Tecnologia (TC)

Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Curitiba (PR), 2020.

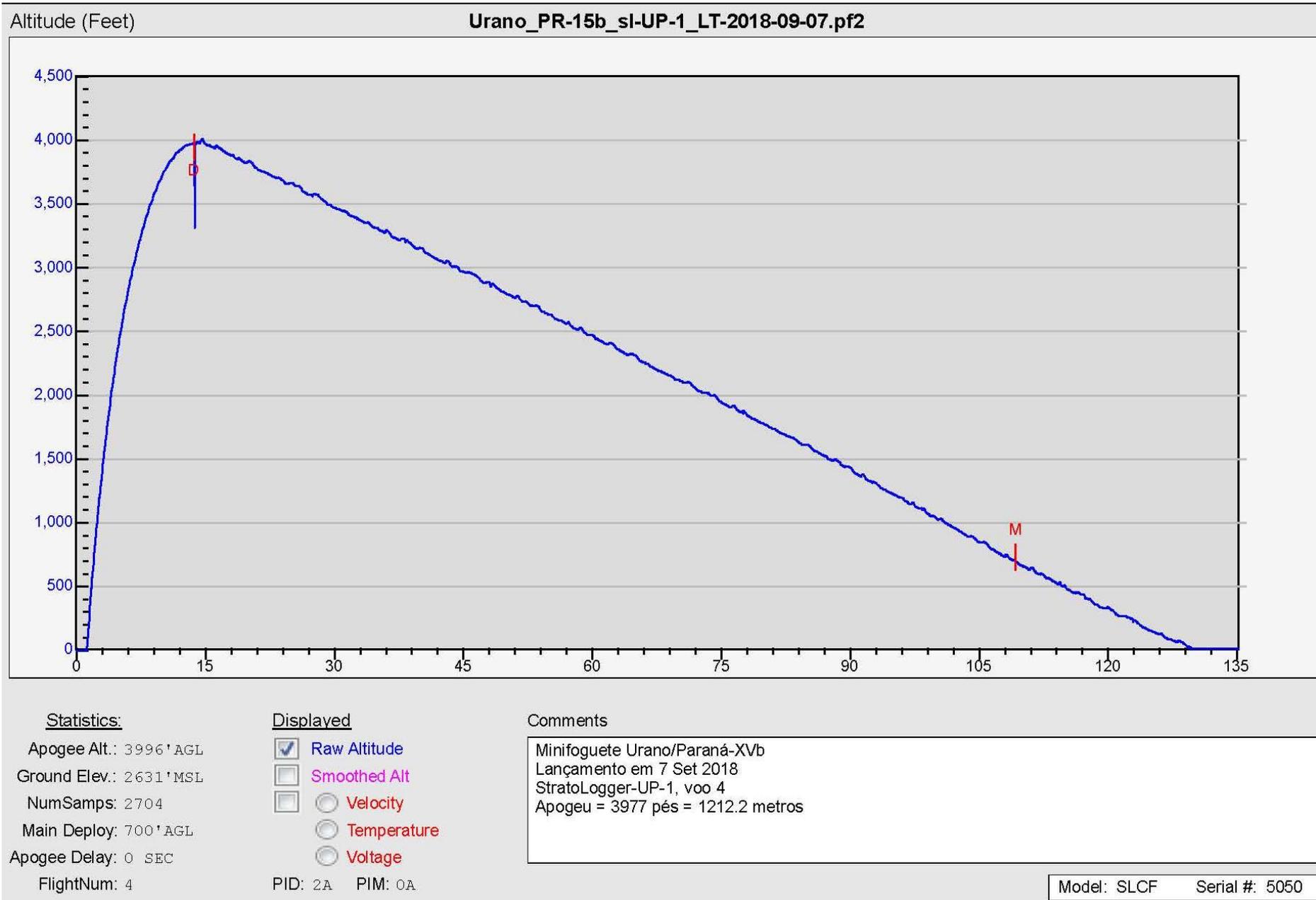


Figura 5.0. Trajetória do minifoguete Urano/Paraná-15b do GFCS/UFPR obtida com altímetro do tipo StratoLogger. Lançado em 7 Set 2018 em Piraquara (PR), atingiu 1212 metros de altura.

5.1 OBJETIVO: o objetivo deste capítulo é determinar a trajetória e outros parâmetros do voo de minifoguete (MF).

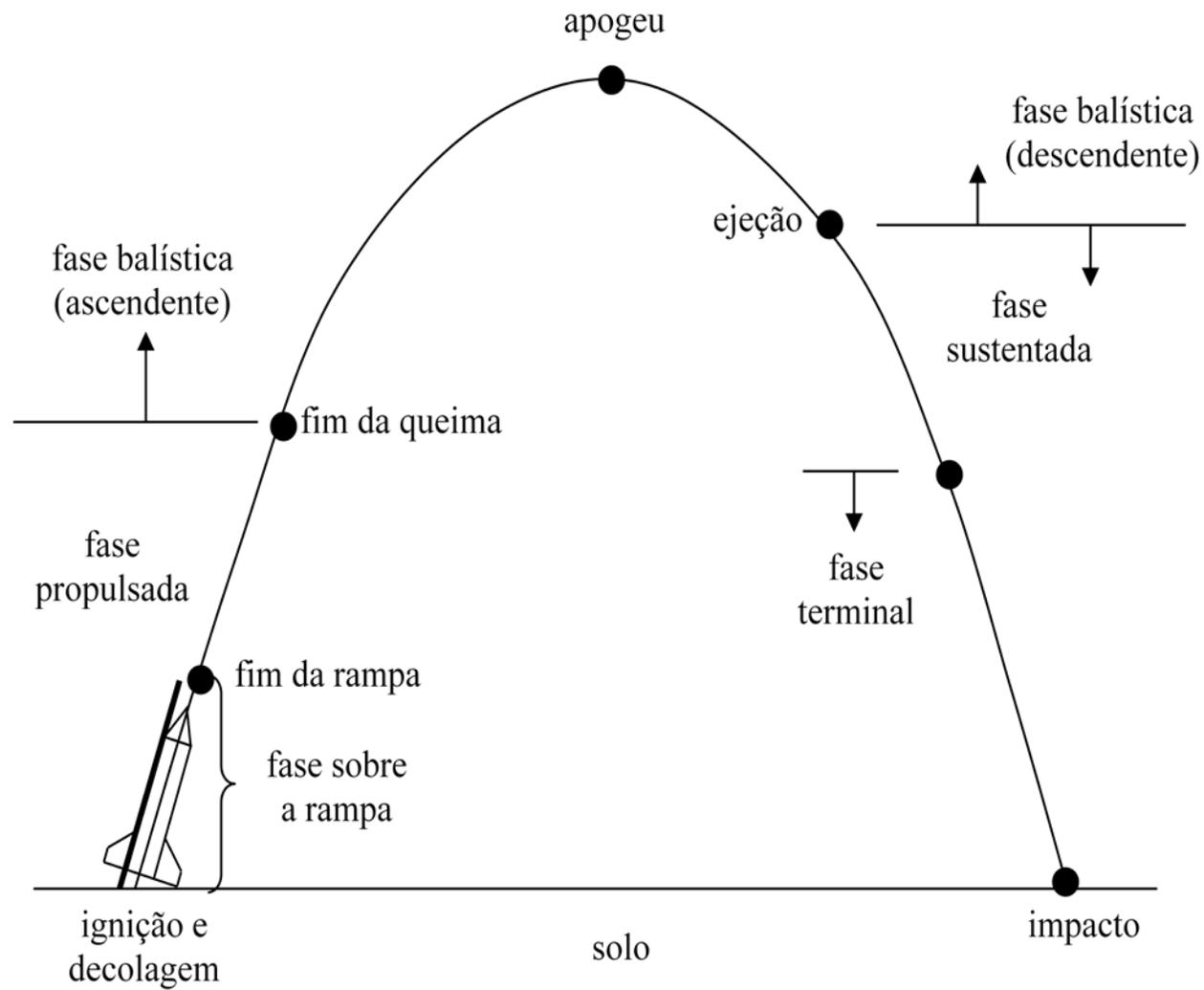


Figura 5.1. Esquema da trajetória de minifoguete.

5.2 FASES DO VOO: as fases ou etapas da trajetória do minifoguete (MF) podem ser divididas em (Figura 5.1):

- 1) **FASE SOBRE A RAMPA**: o MF percorre a sua rampa de lançamento ou lançador, partindo de velocidade nula.
- 2) **FASE PROPULSADA**: etapa durante a qual o motor-foguete está em funcionamento; inclui a fase sobre a rampa.
- 3) **FASE BALÍSTICA**: o motor-foguete não está em funcionamento e não há sistema de recuperação ativo (paraquedas, fita etc).
Esta fase divide-se em:
 - a) **ascendente**: o MF continua subindo com velocidade variável entre o fim da fase propulsada e o apogeu; e
 - b) **descendente**: o MF está caindo com velocidade variável a partir do apogeu até ser ativado o sistema de recuperação.
- 4) **FASE SUSTENTADA**: o MF está caindo mas sustentado por paraquedas, fita ou outro sistema de recuperação; inclui a fase terminal.
- 5) **FASE TERMINAL**: o MF está caindo com velocidade constante.

5.3 PONTOS IMPORTANTES DA TRAJETÓRIA

- 1) **IGNICÃO**: instante em que o motor é acionado eletricamente, pirotécnicamente ou por outro meio.
- 2) **DECOLAGEM**: instante em que o MF inicia o seu movimento.
- 3) **FIM DA RAMPA**: instante em que o MF deixa a rampa de lançamento ou o lançador.
- 4) **FIM DA QUEIMA (q)**: instante em que o motor para de funcionar.
- 5) **APOGEU (H)**: altitude máxima alcançada pelo MF; ponto ideal para ejeção do sistema de recuperação (paraquedas, fita etc).
- 6) **EJECÃO**: instante em que o sistema de recuperação (paraquedas, fita etc) é ejetado ou ativado.
- 7) **IMPACTO (I)**: instante em que o MF retorna ao solo.

5.4 FORÇAS DURANTE O VOO SEM VENTO

FORÇAS ENVOLVIDAS:

T = empuxo do motor

P = peso do minifoguete

D = arrasto aerodinâmico

F = força resultante ($\vec{F} = \vec{T} + \vec{D} + \vec{P}$)

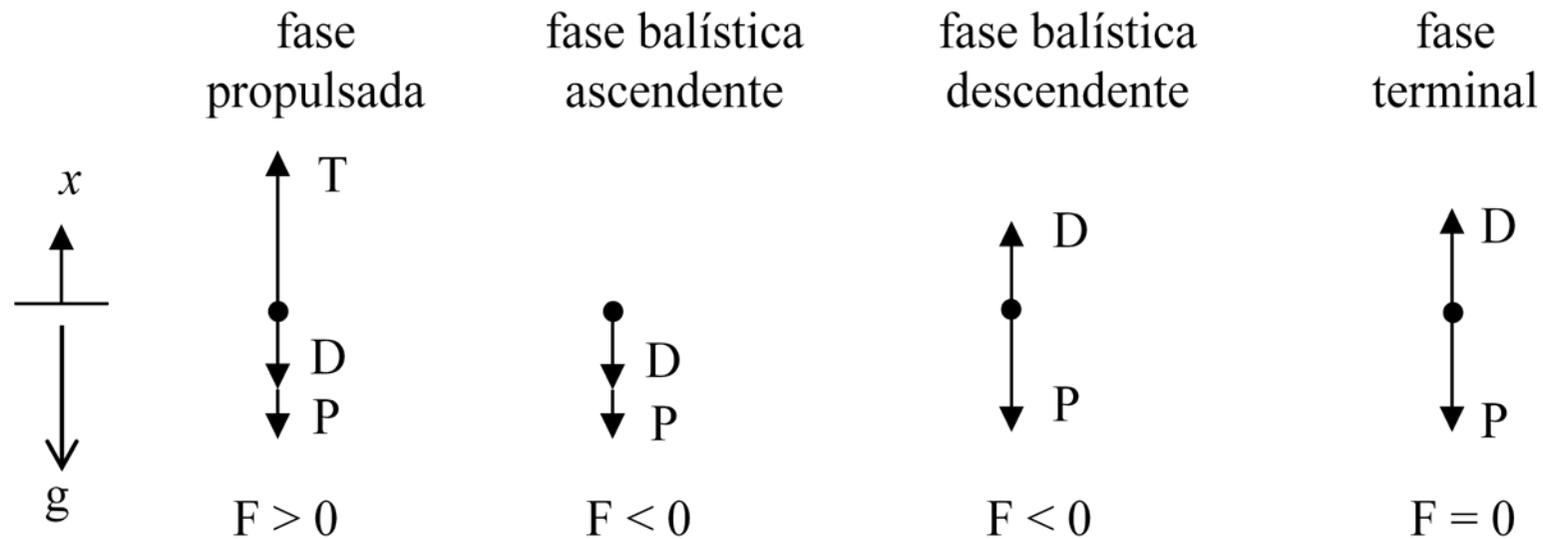


Figura 5.2. Forças em cada fase do voo do minifoguete.

O minifoguete atinge sua velocidade máxima instantes antes do fim da queima. E ela é maior do que a velocidade terminal.

5.5 SOLUÇÃO ANALÍTICA DA TRAJETÓRIA

Simplificações: sem vento; sem arrasto; voo vertical (1Dt); empuxo constante; fluxo de massa de propelente constante; sem sistema de recuperação.

Dados: t_q , \bar{T} , M_p , M_o , g

onde t_q = tempo de queima do motor [s]

\bar{T} = empuxo médio do motor [N]

M_p = massa de propelente [kg]

M_o = massa total do minifoguete (MF) antes do lançamento [kg]

g = aceleração gravitacional local (9,7876 em Curitiba; 9,80665 ao nível do mar) [m/s^2]

FIM DA QUEIMA (q):

Tempo de voo: $t_q = \text{dado}$ [s]

Altura:
$$h_q = \frac{\dot{I}_t}{\dot{M}} \left[1 + \frac{(1-R)}{R} \ln(1-R) \right] - g \frac{t_q^2}{2}$$
 [m] (5.1)

onde

$$I_t = t_q \bar{T} \quad (\text{impulso total}) \quad [\text{N}\cdot\text{s}] \quad (5.2)$$

$$R = \frac{M_p}{M_o} \quad (\text{fração de propelente}) \quad [\text{adimensional}] \quad (5.3)$$

$$\dot{M} = \frac{M_p}{t_q} \quad (\text{fluxo de massa médio de propelente}) \quad [\text{kg/s}] \quad (5.4)$$

Velocidade:
$$V_q = - \left[\frac{I_t}{M_p} \ln(1-R) + g t_q \right]$$
 [m/s] (5.5)

APOGEU (H):

Velocidade: $V_H = 0$ [m/s]

Altura (apogeu): $H = h_q + \frac{V_q^2}{2g}$ [m] (5.6)

Tempo de voo: $t_H = t_q + \frac{V_q}{g}$ [s] (5.7)

IMPACTO (I):

Altura: $h_I = 0$ [m]

Velocidade: $V_I = -\sqrt{2gH} = -\sqrt{2gh_q + V_q^2}$ [m/s] (5.8)

Tempo total de voo: $t_I = t_q + \frac{(V_q - V_I)}{g}$ [s] (5.9)

EXEMPLO: SONDINHA II

$$\left. \begin{array}{l} t_q = 0,7 \text{ s} \\ \bar{T} = 3 \text{ N} \\ M_p = 0,010 \text{ kg} \\ M_o = 0,030 \text{ kg} \end{array} \right\} \begin{array}{l} h_q = 26 \text{ m} \\ t_H = 8,7 \text{ s} \\ V_I = -81 \text{ m/s} = -293 \text{ km/h} \\ V_q = 78 \text{ m/s} = 282 \text{ km/h} \end{array}$$

TEÓRICO (SEM ARRASTO)

$$\left\{ \begin{array}{l} t_I = 17 \text{ s} \\ H = 338 \text{ m} \end{array} \right.$$

REAL (COM ARRASTO)

$$\left\{ \begin{array}{l} t_I \cong 10 \text{ s} \\ H \cong 100 \text{ a } 120 \text{ m} \end{array} \right.$$

⇒ **grandes erros ao se desprezar o arrasto!**

5.6 SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA A FASE TERMINAL

$$\begin{cases} |D| = |P| \\ \frac{1}{2} C_D \rho V_I^2 A = g M_f \end{cases} \quad (5.10)$$

onde

D = força de arrasto aerodinâmico [N]

P = peso do minifoguete [N]

C_D = coeficiente de arrasto [adimensional]

ρ = massa específica do ar [kg/m^3]

V_I = velocidade do minifoguete na fase terminal [m/s]

A = área de referência [m^2]

g = aceleração gravitacional local (9,7876 em Curitiba; 9,80665 ao nível do mar) [m/s^2]

M_f = massa final do minifoguete ou sua massa na fase terminal [kg]

Isolando-se V_I da Equação (5.10), obtém-se

$$V_I = -\sqrt{\frac{2gM_f}{C_D\rho A}} \quad [\text{m/s}] \quad (5.11)$$

A área de referência (A) a ser usada na Equação (5.11) depende da situação:

a) Minifoguete sem sistema de recuperação caindo com o nariz apontado para baixo:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \quad [\text{m}] \quad (5.12)$$

onde d é o diâmetro máximo do minifoguete.

b) Minifoguete com sistema de recuperação ativado caindo com paraquedas circular:

$$A = \frac{\pi D^2}{8} \quad [\text{m}] \quad (5.13)$$

onde D é o diâmetro do círculo (plano) usado para fabricar o paraquedas. É suposto que a área do círculo seja a mesma de uma semi-esfera de diâmetro d quando o paraquedas estiver com carga. Com isso, $d = D\sqrt{2}/2$.

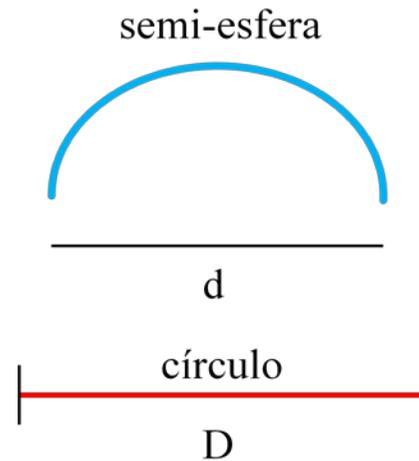


Figura 5.3. Seção transversal de paraquedas circular sem (vermelho) e com (azul) carga.

EXEMPLO: SONDINHA II sem paraquedas:

$$\left. \begin{array}{l} M_f = 0,020 \text{ kg} \\ g = 9,8 \text{ m/s}^2 \\ C_D = 1 \\ \rho = 1,18 \text{ kg/m}^3 \\ d = 0,02 \text{ m} \end{array} \right\} \begin{array}{l} V_I \cong -33 \text{ m/s} \cong -117 \text{ km/h} \\ \text{(lembrando : sem D, } V_I \cong -81 \text{ m/s} \cong -293 \text{ km/h)} \end{array}$$

EXEMPLO: SONDINHA II com paraquedas circular de diâmetro D:

$$\left. \begin{array}{l} M_f = 0,020 \text{ kg} \\ g = 9,8 \text{ m/s}^2 \\ C_D = 1,5 \\ \rho = 1,18 \text{ kg/m}^3 \\ D = 0,5 \text{ m} \end{array} \right\} \rightarrow V_I \cong -1,5 \text{ m/s} \cong -5,4 \text{ km/h}$$

$$\text{Se } D = 0,3 \text{ m} \rightarrow V_I \cong -2,5 \text{ m/s} \cong -9,0 \text{ km/h}$$

$$\text{Se } D = 0,1 \text{ m} \rightarrow V_I \cong -7,5 \text{ m/s} \cong -27 \text{ km/h}$$