

## Multiextrapolação de Richardson com interpolação para reduzir o erro de discretização em CFD

**Márcio A. Martins**

Depto de Matemática, Universidade Estadual do Centro Oeste (UNICENTRO)  
85040-080, Guarapuava, PR; E-mail: [mandre@unicentro.br](mailto:mandre@unicentro.br)

**Carlos H. Marchi, Leandro A. Novak, Marcio A. V. Pinto,  
Luciano K. Araki, Simone F. T. Gonçalves**

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, PR  
E-mails: [marchi@ufpr.br](mailto:marchi@ufpr.br); [leandro.novak@ufpr.br](mailto:leandro.novak@ufpr.br);  
[marcio\\_villela@ufpr.br](mailto:marcio_villela@ufpr.br); [lucaraki@ufpr.br](mailto:lucaraki@ufpr.br); [simone.tg@ufpr.br](mailto:simone.tg@ufpr.br)

**Resumo:** Considera-se o emprego de Multiextrapolação de Richardson (MER) para reduzir o erro de discretização ( $Eh$ ) em cinco tipos de variáveis classificadas de acordo com a sua localização em malhas distintas. Desses tipos, o emprego de MER é abordado com sucesso na literatura apenas em variáveis globais ou que possuem localização nodal fixa em malhas distintas (primeiro tipo). Para os demais casos, MER não é empregada ou é considerada como de baixo desempenho. O propósito deste trabalho é, então, o desenvolvimento de estratégias, aplicáveis a variáveis com coordenadas móvel ou fixa, porém não coincidente com um ponto nodal. Propõe-se um conjunto de procedimentos que permite reduzir  $Eh$  de variáveis para as quais MER apresenta baixo desempenho. Para isso, são adotadas funções de interpolação polinomial e, em alguns casos, o emprego de técnicas de otimização. Como problemas-modelo são considerados: equação de Poisson 1D e equações de Burgers 2D resolvidas, respectivamente, com o emprego dos métodos de Diferenças Finitas (MDF) e de Volumes Finitos (MVF). Presume-se que a metodologia proposta seja válida para esquemas de qualquer ordem de acurácia, com MDF ou MVF, podendo ser estendida para qualquer equação ou número/quantidade de dimensões e permite reduzir consideravelmente  $Eh$ .

**Palavras-chave:** erro de discretização, ordem de acurácia, extrapolação de Richardson, esquemas de alta ordem, interpolação polinomial.

### 1 Introdução

Um dos grandes desafios encontrados em Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) diz respeito ao nível de acurácia das soluções numéricas. Embora os erros numéricos não possam ser totalmente eliminados, eles devem ser minimizados. Dentre as fontes de erro numérico, o erro de discretização ( $Eh$ ) é a mais significativa [5].

Na literatura vigente, a extrapolação de Richardson (ER) é bastante utilizada com o objetivo de se minimizar  $Eh$  e aumentar a sua ordem de acurácia ( $P$ ). Ao se considerar a aplicação de ER de forma recursiva é possível potencializar a sua eficácia. Esse procedimento é conhecido por Multiextrapolação de Richardson (MER) [3]. Entretanto, os textos [1] e [4] relatam algumas dificuldades inerentes ao emprego de MER, devido ao processo de refinamento de malha ( $\Omega^h$ ); isto é, em variáveis que possuem uma localização dependente da  $\Omega^h$  adotada.

A partir dessas dificuldades encontradas, o presente trabalho propõe mecanismos que contribuem para uma aplicação eficaz e abrangente de MER, ou seja, que possibilitem o emprego efetivo de MER mesmo em variáveis que possuem localização não nodal.

### 2 Problemas-modelo

Os modelos matemáticos considerados, bem como as soluções analíticas adotadas, para análise da metodologia proposta são apresentados na Tabela 1. No primeiro caso, as soluções numéricas foram

obtidas com o emprego do MDF com  $P = 2$  e  $4$ , sobre o domínio  $\Omega = [0,1]$  (1D). No segundo caso, consideram-se  $P = 1$  e  $2$ , com MVF, sobre  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$  (2D) [2].

### 3 Metodologia

Considerando-se a obtenção de solução numérica para determinada variável de interesse ( $\phi$ ), em  $G$  malhas distintas  $\Omega^{h_1}, \Omega^{h_2}, \dots, \Omega^{h_g}, \dots, \Omega^{h_G}$ , geradas com razão de refino  $r = h_{g-1}/h_g$  ( $g = 2, \dots, G$ ), o emprego de MER com  $m$  níveis de extrapolação é dado por [3, 4]:

$$\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{\phi_{g,m-1} - \phi_{g-1,m-1}}{r^{P_{m-1}} - 1}; \quad g = 2, \dots, G; \quad m = 1, \dots, g - 1. \quad (1)$$

Caso	Equações	Solução analítica
(1) Poisson	$\frac{d^2 T}{dx^2} = S;$	$T(x) = -\frac{1}{5}e^{3x} + 3x + 2.$
(2) Burgers	$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$ $\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - S;$	$u(x, y) = 8(x^4 - 2x^3 + x^2)(4y^3 - 2y),$ $v(x, y) = -8(4x^3 - 6x^2 + 2x)(y^4 - y^2),$ <p><math>p</math> e <math>S</math> dados em [6].</p>

Tabela 1: Definição dos problemas-modelo

No presente estudo são considerados cinco tipos de  $\phi$ , classificadas de acordo com a sua localização em malhas distintas. O Tipo I consiste de  $\phi$  local cuja localização coordenada ( $a_g$ ) é mantida em todas as  $\Omega^{h_g}$  consideradas e coincide com um ponto nodal (Figura 1, I), ou é caracterizada por uma  $\phi$  global. O Tipo II contempla  $\phi$  local situada no ponto médio entre pontos nodais de  $\Omega^{h_g}$ , ou seja, sua coordenada coincide com a média aritmética das coordenadas dos pontos nodais vizinhos (Figura 1, II). O Tipo III é constituído por  $\phi$  local cuja localização não é dada por um ponto nodal da malha, nem coincide com o ponto médio entre nós vizinhos; entretanto, possui uma localização fixa (Figura 1, III). O Tipo IV é determinado por  $\phi$  local cujo valor é conhecido previamente, nesse caso busca-se identificar a sua localização (Figura 1, IV). O tipo V é dado por  $\phi$  local cuja localização é desconhecida previamente, ou seja, é uma variável que pode apresentar mudança de coordenada em malhas distintas (Figura 1, V).

Com relação ao emprego de MER sobre essas  $\phi$  estabelecidas: para o Tipo I obtém-se  $\phi$  em cada malha e emprega-se MER diretamente com a Eq. (1); para o Tipo II emprega-se interpolação linear (1D) ou bilinear (2D) para obtenção de  $\phi$ , e em seguida considera-se a Eq. (1); para o Tipo III emprega-se interpolação polinomial 1D ou 2D, com o grau máximo possível, para obtenção de  $\phi$  em cada malha e, então, considera-se a Eq. (1); para o Tipo IV emprega-se interpolação polinomial, com grau máximo possível, e resolve-se a equação polinomial obtida considerando-se a igualdade entre o polinômio obtido e o valor estabelecido *a priori*, para obtenção de  $\phi$  em cada malha e, então, considera-se a Eq. (1); para o tipo V, emprega-se interpolação polinomial com o grau máximo possível e, busca-se o seu ponto ótimo (máximo ou mínimo) para a determinação de  $\phi$  em cada malha, e ao final considera-se a Eq. (1).

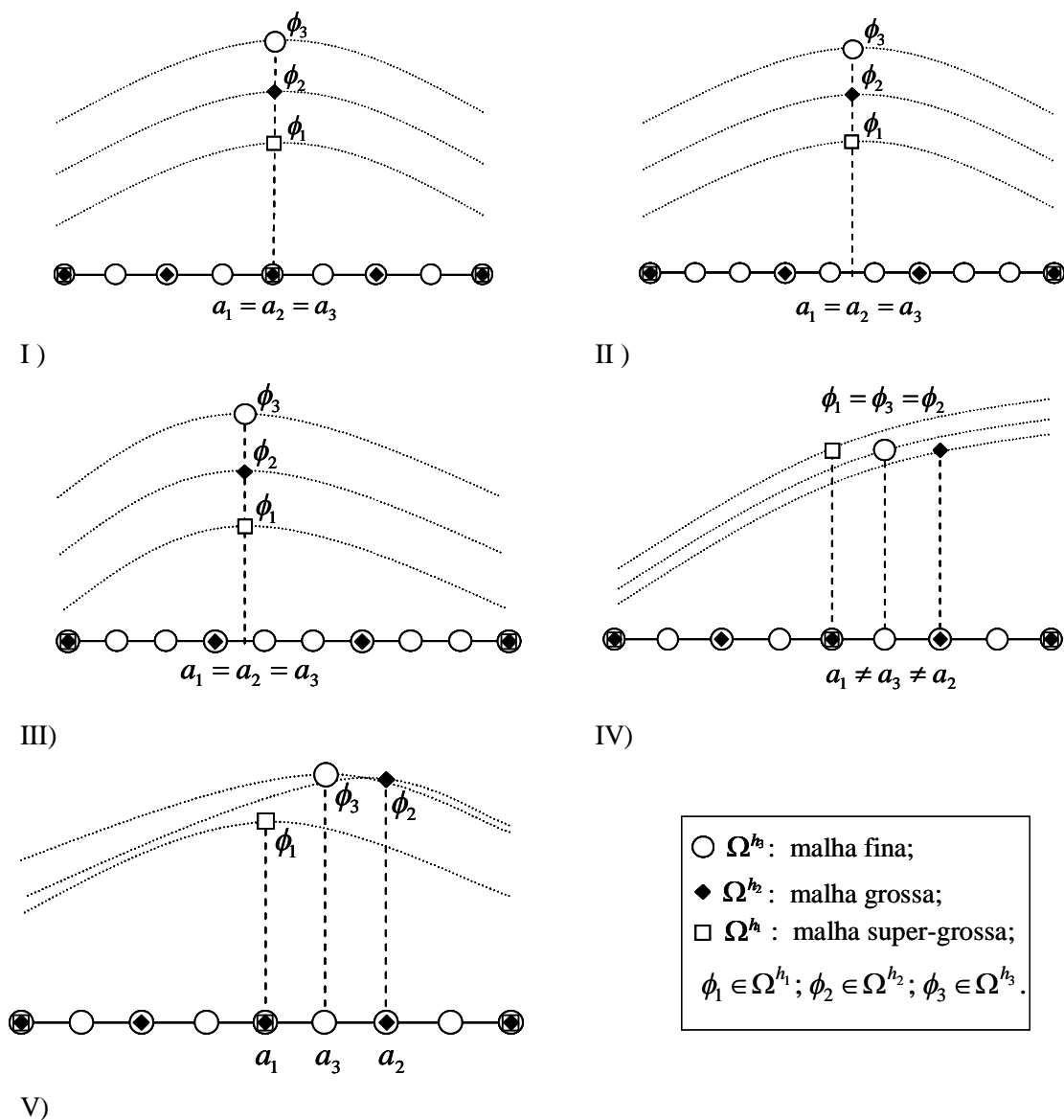


Figura 1: Tipos de variáveis

#### 4 Resultados e Conclusão

Nos casos 1 e 2, analisou-se a metodologia proposta sobre diversas variáveis dos tipos I a V. Entretanto, devido à limitação de espaço são apresentados nesta seção apenas dois tipos.

No caso 1 considera-se a Figura 2 (a) para representação dos resultados obtidos, em que:  $Eh, T(1/2)$ , representa o  $Eh$  associado ao cálculo da temperatura em um ponto nodal específico ( $x = 1/2$ ), e  $Em, T(1/2)$  o resultado obtido com MER sobre essa variável (Tipo I);  $Em, Tmax$  representa o resultado obtido com MER para o  $Eh$  associado ao cálculo da temperatura máxima, com localização indeterminada previamente (Tipo V), e  $Em, Xmax$  o resultado obtido para sua localização coordenada; por sua vez,  $Epm, Tmax$  representa o  $Eh$  para a temperatura máxima, mediante o emprego da metodologia proposta, e  $Epm, Xmax$  o resultado obtido para a sua localização coordenada. Nesse caso, para obtenção de  $Epm$  adotou-se: primeiramente, a interpolação polinomial de grau 10; em seguida considerou-se a busca do seu ponto de máximo pelo método iterativo de Newton; e, ao final, considerou-se o emprego da Eq. (1).

Na Figura 2 (a) é possível comparar o desempenho de MER em  $T(1/2)$  (Tipo I), em  $Tmax$  e em  $Xmax$  (Tipo V). Observa-se que MER não é eficiente sobre a redução de  $Eh$  em  $Tmax$  e em sua

coordenada. Nesse sentido, a metodologia proposta ( $E_{pm}$ ) contribui para a superação dessa dificuldade, isto é, permite reduzir significativamente o  $E_h$  associado.

No caso 2, considera-se a representação dos resultados através da Figura 2 (b), para o erro numérico associado ao valor mínimo de  $u$  sobre o eixo  $x = 1/2$  (Tipo V). Nesse caso a coordenada da variável de interesse depende da  $\Omega^h$  adotada. Considera-se, então, a sua obtenção com interpolação polinomial de graus 2, 4 e 10. Em seguida, localiza-se o ponto de máximo de cada um dos polinômios (método de Newton) e, sobre esses resultados, emprega-se a Eq. (1) (obtem-se  $E_{pm}$ ). Na Figura 2 (b) é possível perceber que os melhores resultados para  $E_{pm}$  foram alcançados com MER aliada ao polinômio de grau 10. Dessa forma, o valor para a ordem de acurácia dos resultados numéricos é  $P \approx 11$ .

De acordo com os resultados obtidos conclui-se que, para se empregar MER deve-se primeiramente enquadrar a variável de interesse em um dos cinco tipos estabelecidos, e a partir disso identifica-se o procedimento adequado. A metodologia proposta permite reduzir  $E_h$  inclusive nos casos em que a MER é considerada ineficiente. Tal procedimento, caracterizado por um pós-processamento, apresenta baixíssimo custo computacional e, em princípio, é válido para MDF e MVF com aproximações de qualquer ordem de acurácia.

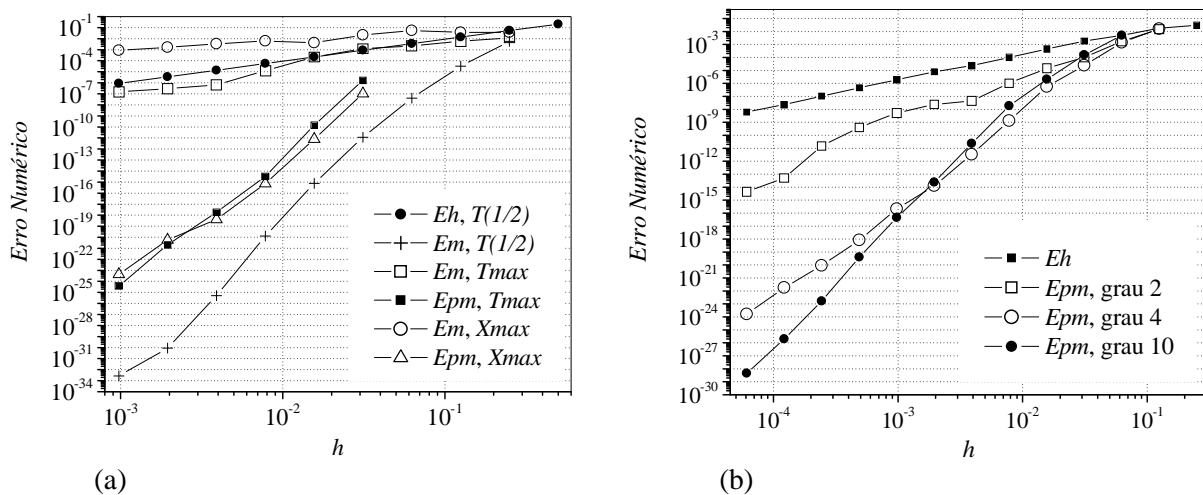


Figura 2: (a)  $E_h, E_m$  e  $E_{pm}$  do caso 1; (b)  $E_h$  e  $E_{pm}$  do caso 2

### Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), AEB (Agência Espacial Brasileira) através do Programa Uniespaço, Fundação Araucária (Paraná) e CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). O primeiro autor agradece a UNICENTRO. O segundo autor é bolsista do CNPq.

### Referências

- [1] C. Burg, T. Erwin, Application of Richardson extrapolation to the numerical solution of partial differential equations, Num. Meth. Part. Diff. Eq., vol. 25, pp. 810-832, (2009).
- [2] S. F. T. Gonçalves, “Estudo de parâmetros do método multigrid geométrico para equações 2D e volumes finitos”, Tese de doutorado, PGMEC-UFPR, Curitiba, 2013.
- [3] C. H. Marchi, L. K. Araki, A. C. Alves, R. Suero, S. F. T. Gonçalves, M. A. V. Pinto, Repeated Richardson extrapolation applied to the two-dimensional Laplace equation using triangular and square grids, Appl. Math. Mod., vol. 37, pp. 4661-4675, (2013).

- [4] C. H. Marchi, R. Suero, L. K. Araki, The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024 x 1024 grid, *J. Braz. Soc. of Mech. Sc. and Eng.*, vol. 31, pp. 186-198, (2009).
- [5] J. C. Roy, W. L. Oberkampf, A comprehensive framework for verification, validation, and uncertainty quantification in scientific computing, *Comp. Meth. in Appl. Mech. Eng.*, vol. 200, pp. 2131-2144, (2011).
- [6] T. M. Shih, C. H. Tan, B. C. Hwang, Effects of grid staggering on numerical scheme, *Int. J. Num. Meth. Fld.*, vol. 9, pp. 193-212, (1989).