



ANÁLISE DE FOURIER LOCAL E OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS DO MÉTODO *MULTIGRID* PARA A EQUAÇÃO DE DIFUSÃO ANISOTRÓPICA

Grazielli Vassoler Rutz

grazielli.vassoler@ifsc.edu.br

Instituto Federal de Santa Catarina – Campus Chapecó.

Rua Nereu Ramos, 3450D, 89.813-000, Chapecó, Santa Catarina, Brasil.

Marcio Augusto Villela Pinto

marcio_villela@ufpr.br

Universidade Federal do Paraná.

Departamento de Engenharia Mecânica (DEMEC), 81.531-980, Curitiba, Paraná, Brasil.

Resumo: *Este trabalho tem por objetivo analisar e otimizar parâmetros do método multigrid, além de minimizar o tempo computacional em problemas de transferência de calor que apresentem anisotropia nos coeficientes. Será realizada uma análise de Fourier local para auxiliar no projeto de um método multigrid eficiente. O modelo considerado é de difusão pura com anisotropia alinhada ao eixo de coordenada x . Para a discretização da equação é utilizado o método de diferenças finitas com malhas uniformes e esquema numérico de segunda ordem. Os problemas serão resolvidos com o método multigrid geométrico, esquema de correção e ciclo V com razão de engrossamento padrão. É calculado, o fator de suavização para diferentes métodos de resolução de sistemas de equações algébricas e o fator de convergência assintótico variando diferentes parâmetros multigrid. A partir dos parâmetros ótimos obtidos via LFA, vários experimentos numérico foram realizados, variando o número de incógnitas, números de iterações internas e número de níveis no método multigrid. A principal conclusão é de que as anisotropias estudadas afetam o desempenho do método multigrid no que diz respeito ao tempo de CPU e a ordem de complexidade dos solvers estudados.*

Palavras-chave: *Anisotropia física. Parâmetros multigrid. Difusão. Análise de Fourier Local.*

1 INTRODUÇÃO

A Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) é uma área da computação científica que estuda métodos numéricos para simulação de problemas que envolvem fluidos em movimento. Sabe-se que estes métodos, muitas vezes, exigem um alto custo computacional. Este fato ocorre, pois geralmente os problemas que se deseja resolver envolvem muitas variáveis e as matrizes associadas aos coeficientes são de grande porte além de se tratar de matrizes esparsas (Fortuna, 2000).

A discretização de um modelo matemático na área de CFD pode ser realizada pelo Método de Diferenças Finitas (MDF) (Ferziger e Peric, 2002), o qual consiste em, aproximar através de equações algébricas, cada termo do modelo matemático para cada ponto ou nó da malha. Este processo conduz a um sistema de equações algébricas da forma

$$AT = b, \quad (1)$$

onde $A \in R^{n \times n}$ é a matriz dos coeficientes, $T \in R^n$ e representa a temperatura e $b \in R^n$ é o vetor independente.

O método *multigrid* é um dos métodos mais efetivos para acelerar a convergência de métodos iterativos e resolver sistemas lineares ou não lineares, problemas anisotrópicos, dentre outros. No entanto, para problemas com fortes anisotropias a eficiência do método *multigrid* não tem sido totalmente alcançada. Problemas anisotrópicos são muito comuns na engenharia e surgem em muitas simulações físicas por várias razões. Estes fenômenos podem refletir um modelo físico, no caso de um material com elasticidade anisotrópica ou condução de calor anisotrópica. Anisotropias geométricas também podem surgir a partir de discretizações de malhas distintas por direções, para o estudo de características físicas (por exemplo, camada limite) (Briggs *et al.*, 2000; Trottenberg, 2001; Wesseling *et al.*, 2001).

Os coeficientes das equações diferenciais, distintos da unidade e também distintos entre si, geram anisotropia física. Para este tipo de problema, a eficiência dos métodos iterativos é reduzida (Briggs *et al.*, 2000; Trottenberg, 2001).

Problemas de anisotropia física foram investigados por Rabi e de Lemos (2001), que discretizaram a equação de advecção-difusão bidimensional, com coeficientes nulos e constantes. Para a discretização das equações empregaram o método de volumes finitos. O método *multigrid* foi empregado com o esquema CS, *solver* Gauss-Seidel, utilizando ciclos V e W. Os autores apresentaram um estudo para diferentes campos de velocidades (nulos e constantes), número de malhas, número de passos de suavização em cada nível e diferentes *solvers*.

Wienands e Joppich (2005) apresentam um *software* para desenvolver uma Análise Local de Fourier (*Local Fourier Analysis*, LFA) em problemas anisotrópicos. Eles calculam o fator de convergência do método *multigrid* para a equação de difusão anisotrópica, variando diferentes *solver* e operadores de restrição e prolongação.

Pinto e Marchi (2006) estudaram anisotropia geométrica. Utilizaram a equação de Laplace bidimensional e diferentes tipos de algoritmos de engrossamento. Constataram que o algoritmo “semi-engrossamento seguido de engrossamento padrão” com suavizador Gauss-Seidel lexicográfico é eficiente para as anisotropias estudadas.

Fischer e Huckle (2006) desenvolveram o método *multigrid* para sistemas de equações algébricas, onde a anisotropia não ocorre ao longo dos eixos coordenados, e sim em direções arbitrárias. Fischer e Huckle (2008) utilizaram o método *multigrid* desenvolvido por Fischer e

Huckle (2006) e testaram diferentes *solvers* para a resolução do sistema de equações algébricas. Utilizaram ainda algoritmos de engrossamento padrão e semi-engrossamento.

Suero *et al.*, (2008) apresentaram um estudo do efeito da anisotropia física sobre o método *multigrid* na solução da equação de advecção-difusão bidimensional. Utilizaram o método *multigrid* geométrico com esquema de correção FAS, ciclo V e *solver* MSI para resolução dos sistemas de equações algébricas. Foram considerados diferentes campos de velocidades (nulo, constantes e variáveis) e estudaram a influência do número de iterações internas do *solver*, número de malhas e número de incógnitas. A principal conclusão é de que a anisotropia física afeta pouco o desempenho do *multigrid*, pois quanto maior o número de nós da malha, mais próximo do isotrópico torna-se o problema.

Oliveira *et al.*, (2012) analisam a anisotropia geométrica para várias malhas e razões de aspecto. Também analisam alguns parâmetros do método *multigrid* tais como: *solvers*, tipos de restrição, número de níveis e número de iterações internas, entre diversos algoritmos de engrossamento. Concluem que o semi-engrossamento parcial (PW) teve um bom desempenho.

Vassoler-Rutz *et al.*, (2015) analisaram o efeito da anisotropia física sobre o método *multigrid* para dois problemas de difusão anisotrópica. Utilizaram o esquema de correção FAS, ciclo V, os *solvers* *Modified Strongly Implicit* (MSI) e Gauss-Seidel (GS). Concluíram, que para fortes anisotropias, a ordem de complexidade o desempenho do *multigrid* torna-se ruim.

Diversos trabalhos utilizando o método *multigrid* são encontrados na literatura e a escolha dos componentes *multigrid* têm um papel fundamental na convergência ou não deste método. Esta escolha, muitas vezes, torna-se difícil e uma pequena alteração no método, pode melhorar sensivelmente o seu desempenho. A Análise Local de Fourier (*Local Fourier Analysis*, LFA) permite prever o desempenho do método *multigrid*, pois fornece estimativas de taxas de convergência de seus componentes.

No presente trabalho pretende-se analisar e otimizar parâmetros do método *multigrid*, além de minimizar o tempo computacional em problemas de anisotropia física. Será realizada uma Análise de Fourier Local para auxiliar no projeto de um método *multigrid* eficiente.

O modelo matemático considerado é de difusão bidimensional, onde a anisotropia física aparece nos coeficientes e será denotado neste texto por anisotropia difusiva. Para a discretização das equações será utilizado um esquema de segunda ordem CDS nos termos difusivos.

Para a obtenção do fator de suavização (μ_{loc}), os sistemas de equações obtidos da discretização são resolvidos utilizando os *solvers* Gauss-Seidel Red-Black e Gauss-Seidel Lexicográfico (Briggs *et al.*, 2000). Para a obtenção do fator de convergência assintótico (ρ_{loc}), além dos *solvers* citados acima são utilizados os operadores de restrição por Ponderação Completa (FW), Injeção (INJ) e Meia-Ponderação (HW). Os operadores de prolongação utilizados são Bilinear e 7-pontos. O número de iterações internas do *solver* (ν) variando de 1 até 6.

Pretende-se utilizar os dados obtidos via LFA para analisar a influência da anisotropia física sobre o tempo de CPU (t_{CPU}) para diversos parâmetros do método *multigrid* geométrico, tais como: *solvers*, números de iterações internas no *solver* (ν), número de níveis de malhas percorridas no ciclo (L) e número de incógnitas (N).

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na seção 2 são apresentados os modelos matemático e numérico. Na seção 3 são apresentados os resultados dos experimentos numéricos. Na seção 4 é apresentada a conclusão do trabalho.

2 MODELOS MATEMÁTICO E NUMÉRICO

Para os problemas apresentados abaixo, o domínio de cálculo utilizado é dado por $0 \leq x, y \leq 1$ e a discretização das equações é feita através de malha uniforme com um número de nós dado por $N = N_x \cdot N_y$, onde N_x e N_y são os números de nós nas direções coordenadas x e y , respectivamente, incluindo os contornos.

2.1 Modelo Matemático e Discretização

O problema de anisotropia difusiva será analisado a partir da equação de difusão bidimensional dado pela Eq. (2)

$$\begin{cases} -T_{xx} - \varepsilon T_{yy} = S \\ T(0, y) = T(x, 0) = T(x, 1) = T(1, y) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

onde, T_{xx} é a derivada segunda de T em relação a x , T_{yy} é a derivada segunda de T em relação a y e $\varepsilon > 0$.

O termo fonte S e a solução analítica T são dados por

$$S = 2[(1 - 6x^2)y^2(1 - y^2) + \varepsilon(1 - 6y^2)x^2(1 - x^2)] \text{ e } T(x, y) = (x^2 - x^4)(y^4 - y^2). \quad (3)$$

A discretização das equações são obtidas com um esquema de segunda ordem CDS nos termos difusivos e são dadas por

$$a_p T_p + a_w T_w + a_n T_n + a_e T_e + a_s T_s = b_p. \quad (4)$$

onde T é a incógnita do sistema, $P = 2, \dots, N - 1$ é o número de cada incógnita, $W = P - N_x$, $E = P + N_x$, $N = P + N_y$, e $S = P - N_y$.

A discretização da Eq. (2) resulta na Eq. (4) e para os nós internos e considerando $h_x = \frac{1}{N_x}$ e $h_y = \frac{1}{N_y}$ tem-se

$$a_p = \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2\varepsilon}{h_y^2} \right), \quad a_w = a_e = -\frac{1}{h_x^2}, \quad a_n = a_s = -\frac{\varepsilon}{h_y^2}, \quad b_p = S. \quad (5)$$

Para os contornos ($P=1$ e $P=N$) norte, sul, leste e oeste tem-se $a_p = 1$, $a_w = a_e = a_n = a_s = 0$.

2.2 Análise de Fourier

O fator de suavização $\mu(S_h) = \mu_{loc}$ é o raio espectral do operador de suavização S_h e estima quanto o esquema de relaxação (*solver*) reduz as componentes de altas frequências do erro, tomando S_h como operador de suavização (Trottenberg, 2001; p. 105).

O operador de correção da malha grossa é dado por $K_h^{2h} = I_h - I_{2h}^h (L_{2h})^{-1} I_h^{2h} L_h$ onde I_h^{2h}, I_{2h}^h são os operadores de transferências e I_h , o operador identidade em na malha fina.

Considerando $M_h^{2h} := S_h^{v_2} K_h^{2h} S_h^{v_1}$ como o operador de duas malhas, pode-se calcular os fatores de convergência de M_h^{2h} . Para isso, é necessário analisar como os operadores $L_h, L_{2h}, I_h^{2h}, I_{2h}^h, S_h$ atuam nas funções de Fourier $\varphi_h(\theta, \cdot)$.

Assim o fator de convergência assintótico $\rho(M_h^{2h}) = \rho_{loc}$ é o raio espectral da matriz 4×4 M_h^{2h} (Trottenberg, 2001; p. 110) e pode ser obtido utilizando-se LFA. Este fator fornece o comportamento da convergência assintótica do método *multigrid* para duas malhas.

2.3 Método *Multigrid* e detalhes computacionais

O sistema de equações lineares dado pela Eq. (1) é resolvido utilizando o método *multigrid* geométrico (Briggs *et al.*, 2000; Trottenberg, 2001) com esquema de correção (CS), ciclo V e estimativa inicial nula.

A razão de engrossamento $r = p/q$ é dada por $r = 2$ (engrossamento padrão) (Wesseling e Oosterlee, 2001). Os operadores de transferência entre as malhas empregados foram restrição por injeção, meia-ponderação e ponderação completa e prolongação por interpolação bilinear e 7-pontos. Os sistemas de equações obtidos da discretização são resolvidos utilizando os *solvers* Gauss-Seidel Red-Black (GS-RB) e Gauss-Seidel Lexicográfico (GS-Lex).

O critério de parada utilizado para interromper o processo iterativo é baseado na norma do resíduo adimensionalizada. O resíduo do sistema de equações algébricas é definido por

$$R^n = b - AT^n \quad (6)$$

onde T^n é a solução da incógnita na iteração n .

Considerando $L^n = \|R^n\|_1$ e $L^0 = \|R^0\|_1$, se $\frac{L^n}{L^0} \leq tol$ o processo iterativo é interrompido. A norma utilizada é dada como $L^n = \sum_{p=1}^N |R_p^n|$ e a tolerância estabelecida é $tol = 10^{-14}$.

Para as simulações utilizou-se aritmética de precisão quádrupla. Os códigos numéricos foram implementados usando a linguagem Fortran 2003, com o aplicativo Intel 9.1 Visual Fortran. Todos os resultados numéricos foram obtidos em um computador com processador IntelCorei7 2.66 GHz, 16 GB de RAM e sistema operacional Windows 8, com 64 bits.

O valor ótimo de um parâmetro é obtido quando a solução do problema apresenta o menor tempo de CPU para valores fixos dos demais parâmetros. Neste trabalho, denota-se por $v_{ótimo}$ o número ótimo de iterações internas do *solver* e por $L_{ótimo}$ o número ótimo de níveis de malha. Cada tamanho de problema (N) terá um $v_{ótimo}$ e um $L_{ótimo}$. O parâmetro $L_{máximo}$

representa o número máximo possível de malhas que se pode usar para uma dada malha sendo que a malha mais grossa tem apenas um nó interno. Por exemplo, se $N=1025 \times 1025$ nós, as malhas mais grossas são de 1025×1025 , 513×513 , 257×257 , 129×129 , 65×65 , 33×33 , 17×17 , 9×9 , 5×5 e 3×3 nós, portanto, $L_{\text{máximo}} = 10$.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

São apresentados nesta seção, os resultados obtidos para LFA e para análise de complexidade. Para a análise de complexidade, considerou-se o estudo dos seguintes parâmetros: número de iterações internas (ν) e número de níveis (L). São considerados $N=129 \times 129$, 513×513 e 2049×2049 . Para analisar o número de incógnitas (N) são considerados os problemas $N=5 \times 5$, $N=9 \times 9$, $N=17 \times 17$, $N=33 \times 33, \dots$, $N=4097 \times 4097$. É apresentada também uma comparação do desempenho dos solvers GS-RB e GS-Lex.

A Eq. (2) foi analisada para os seguintes valores de $\varepsilon = 0,0001$; $0,001$; $0,01$; $0,1$; 1 ; 10 ; 100 ; 1000 ; 10000 . Quando $\varepsilon = 10^a$ ou $\varepsilon = 10^{-a}$, neste trabalho, denota-se anisotropia simétrica. Por exemplo, se $a = 1$ temos $\varepsilon = 10$ e $\varepsilon = 0,1$; neste caso temos anisotropia simétrica.

3.1 Análise de Fourier

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos pela LFA para μ_{loc} e ρ_{loc} . A Fig. 1 apresenta o fator de suavização μ_{loc} obtido para GS-RB e GS-Lex. Para as figuras Fig. 1 até Fig. 4 utilizou-se a ferramenta “gráfico dinâmico” disponível no software Microsoft Excel 2010. Esta ferramenta permite a entrada de vários parâmetros e organiza a saída através de gráficos envolvendo variáveis de interesse em função de variáveis que se queira. A Fig. 1 mostra no eixo vertical, os somatórios de μ_{loc} em função das demais variáveis.

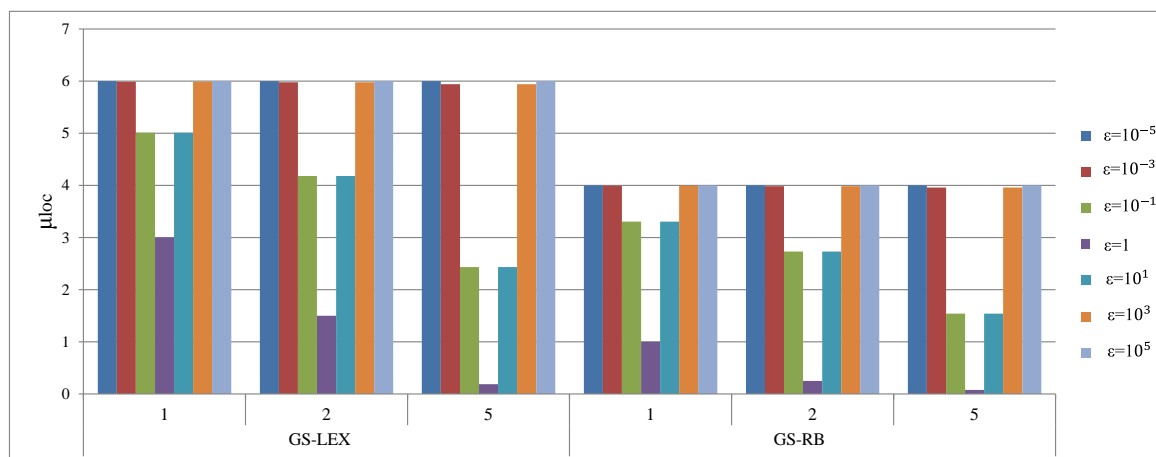


Figura 1. μ_{loc} para GS-RB e GS-Lex com $\nu = 1, 2$ e 5 .

Observa-se que para $\varepsilon = 1$ (problema isotrópico), $\varepsilon \rightarrow \infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0$ tem-se $\mu_{loc}(GS - RB) \ll \mu_{loc}(GS - Lex)$. Assim, dentre os solvers, o GS-RB é o que apresenta menor fator de suavização para o problema de anisotropia difusiva. A Tabela 1 apresenta o fator de suavização para os solvers estudados.

Tabela 1 : Fator de suavização considerando $\nu = 1$ para os solvers GS-Lex e GS-RB

ε		10^{-4}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^2	10^4
μ_{loc}	GS-Lex	0.999	0.961	0.696	0.249	0.696	0.961	0.999
	GS-RB	0.999	0.960	0.683	0.062	0.683	0.960	0.999

Observa-se, pela Tab. 1 que GS-RB apresenta menor fator de suavização em relação à GS-Lex para todos os problemas estudados, exceto para $\varepsilon = 10^4$ e $\varepsilon = 10^{-4}$. Neste caso, ambos os solvers apresentam o mesmo valor para μ_{loc} . Estes dados estão de acordo com a literatura.

A Fig. 2 apresenta o fator de convergência assintótico ρ_{loc} obtido para GS-RB e GS-Lex com $\varepsilon = 1$ (problema isotrópico) e $\nu = 1$. Os operadores de restrição apresentados são ponderação completa (FW), meia-ponderação (HW) e injeção (INJ). Este último foi utilizado apenas para o solver GS-Lex, já que para GS-RB não é possível utilizar este operador para restrição, devido à forma de leitura dos nós na malha. Os operadores de prolongação utilizados são bilinear e 7-pontos.

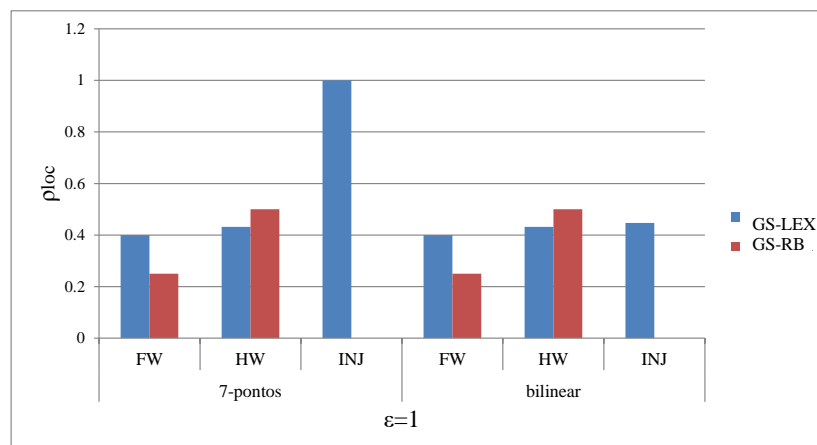


Figura 2: ρ_{loc} para solvers com ordenação Lexicográfica e Red-Black para $\nu = 1$; restrição: FW, HW e INJ; prolongação: 7-pontos e bilinear e $\varepsilon = 1$.

Observa-se que para $\varepsilon = 1$ (problema isotrópico), dentre os operadores de prolongação, é indiferente utilizar 7-pontos ou bilinear para todos os casos, com exceção do caso em que se utiliza restrição por injeção. Neste caso, o menor valor para ρ_{loc} aparece com a combinação prolongação por interpolação bilinear e restrição por injeção.

Observa-se também que o menor fator de convergência assintótico ocorre quando utiliza-se o solver GS-RB, restrição por ponderação completa (FW), prolongação por interpolação bilinear.

A Fig. 3 apresenta o fator de convergência assintótico ρ_{loc} obtido para GS-RB e GS-Lex com $\varepsilon = 10$, $\varepsilon = 10^{-1}$ e $\nu = 1$.

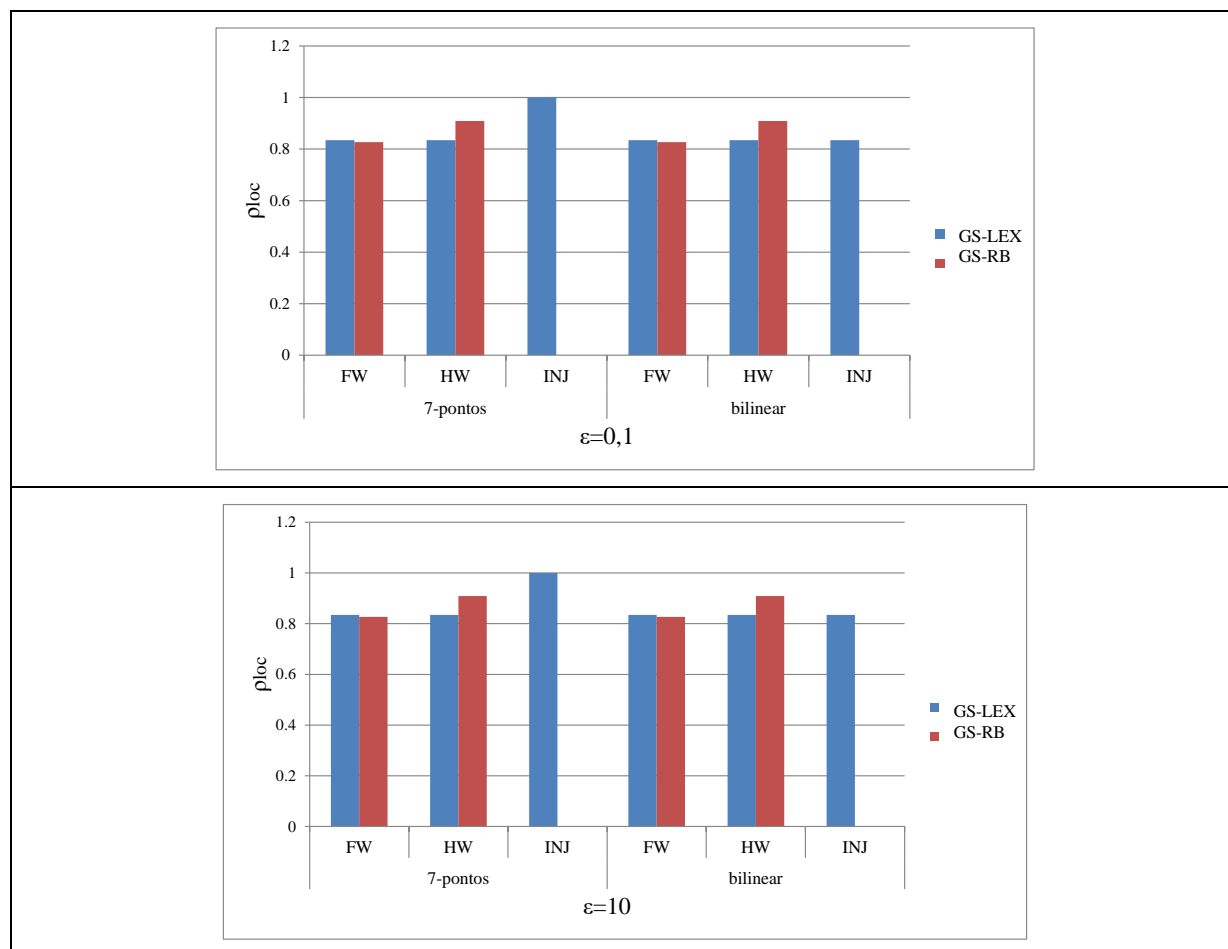


Figura 3: ρ_{loc} para solvers com ordenação Lexicográfica e Red-Black, $\nu = 1$; restrição: FW, HW e INJ; prolongação: 7-pontos e bilinear e $\varepsilon = 10^{-1}$ e $\varepsilon = 10$.

Na Fig. 3 observa-se que para $\varepsilon = 10^{-1}$ e $\varepsilon = 10$, (anisotropias simétricas) ρ_{loc} apresenta o mesmo comportamento. Dentre os operadores de prolongação, é indiferente utilizar 7-pontos ou bilinear para todos os casos, com exceção do caso em que se utiliza restrição por injeção. Neste caso, o menor valor para ρ_{loc} aparece com a combinação prolongação por interpolação bilinear e restrição por injeção.

Observa-se também que o menor fator de convergência assintótico ocorre quando utiliza-se o solver GS-RB, restrição por ponderação completa (FW), prolongação por interpolação bilinear.

Em todos os problemas apresentados acima, é indiferente utilizar interpolação bilinear ou 7-pontos. Por facilidade de programação, optou-se por utilizar interpolação bilinear e todos os resultados apresentados na sequência utilizam este operador. Para o operador de restrição, será utilizado FW, que apresentou os melhores resultados.

A Fig. 4 apresenta o ρ_{loc} para GS-RB e GS-Lex, restrição por FW, prolongação: bilinear e $\varepsilon = 10^{-a}$ e $\varepsilon = 10^a$, com $a = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $\nu = 1$.

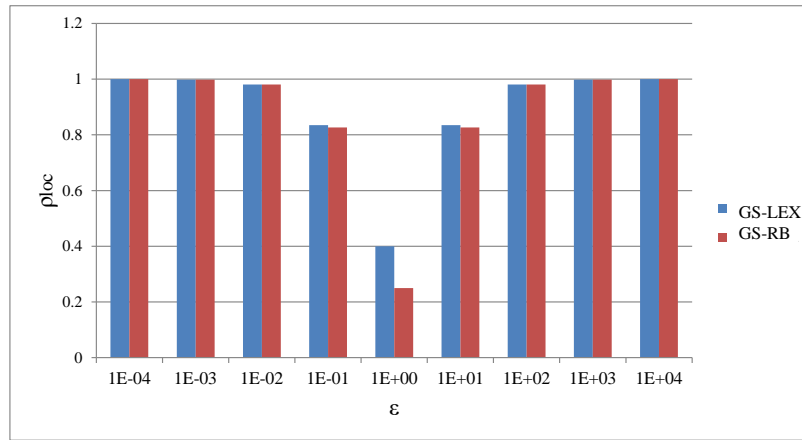


Figura. 4: ρ_{loc} para GS-RB e GS-Lex, $\nu = 1$; restrição: FW; prolongação: bilinear; $\varepsilon = 10^{-a}$ e $\varepsilon = 10^a$, com $a = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Observa-se que os *solvers* GS-Lex e GS-RB apresentam um bom desempenho apenas para o problema isotrópico. À medida que o problema torna-se anisotrópico, tais *solvers*, associados ao *multigrid* não apresentam um bom desempenho. Na próxima seção será apresentada a análise de complexidade do *multigrid* utilizando os itens que tiveram o melhor desempenho na Análise de Fourier Local, ou seja, restrição por ponderação completa, prolongação por interpolação bilinear e *solver* GS-RB.

Observa-se ainda que ρ_{loc} está se aproximando de 1, ou seja, o *multigrid* começa a divergir para $\varepsilon = 10^{-1}$ e $\varepsilon = 10$. Este mesmo comportamento aparece para $\varepsilon = 10^{-a}$ e $\varepsilon = 10^a$, $a = 2, 3$ e 4 , ou seja, para fortes anisotropias.

3.2 Análise de Complexidade

Nesta seção, serão utilizados os resultados obtidos via LFA para realizar a análise de complexidade.

- Número de iterações internas (ν)

Para a obtenção do número ótimo de iterações internas, cada problema foi resolvido utilizando o número máximo de níveis possíveis, ou seja, $L_{\text{máximo}}$. Foram testados valores de ν entre 1 e 5000, uma vez que, para fortes anisotropias, os *solvers* atingem a convergência com um número elevado de iterações internas.

Pode-se observar pela Fig. 5 que, para o problema isotrópico ($\varepsilon = 1$), $\nu_{\text{ótimo}} = 1$. Para as anisotropias simétricas os valores de $\nu_{\text{ótimo}}$ são simétricos. Observa-se também que à medida que o problema torna-se mais anisotrópico, maior será $\nu_{\text{ótimo}}$.

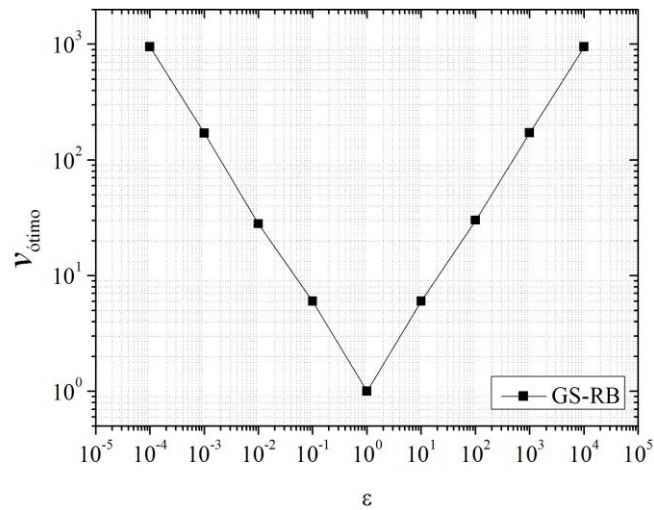


Figura. 5: Número ótimo de iterações internas ($V_{\text{ótimo}}$) versus coeficiente de anisotropia (ϵ)

- Número de níveis (L)

Para se determinar o número ótimo de malhas foram utilizados os valores ótimos de iterações internas obtidos da seção anterior. Para o problema isotrópico $L_{\text{ótimo}} = L_{\text{máximo}}$.

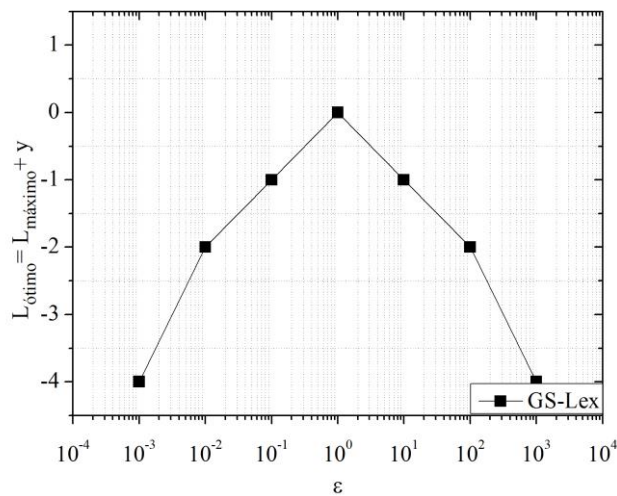


Figura. 6: Número ótimo de níveis ($L_{\text{ótimo}}$) versus coeficiente de anisotropia (ϵ) .

Fonte: Adaptado de Vassoler-Rutz *et. al.*, (2015)

À medida que o problema torna-se mais anisotrópico $L_{\text{ótimo}}$ torna-se $L_{\text{máximo}} - 1$, $L_{\text{máximo}} - 2$, $L_{\text{máximo}} - 3$, e assim sucessivamente, dependendo da anisotropia, o que pode ser observado no Fig. 6, obtido de Vassoler *et. al.*, (2015), que estudou dois problemas de anisotropia difusiva para o esquema FAS e solvers GS-Lex e MSI. Se adotarmos $L_{\text{ótimo}} = L_{\text{máximo}}$ para todos os problemas, teremos uma pequena diferença no tempo de CPU para aqueles casos onde o $L_{\text{ótimo}}$ não é o $L_{\text{máximo}}$ e em termos relativos (E(%)) tem-se

$$\left(E(\%) = \frac{t_{CPU}(L_{\text{máximo}}) - t_{CPU}(L_{\text{ótimo}})}{t_{CPU}(L_{\text{máximo}})} \times 100\% \right). \quad (7)$$

Vassoler-Rutz *et. al.*, (2015) observou que para fortes anisotropias o maior erro observado foi na malha com 2049x2049 nós, de 9,8% de diferença para $\varepsilon = 10000$. Portanto, por facilidade de programação, adota-se $L = L_{\text{maximum}}$ para todos os problemas.

- Número de variáveis (N)

Para avaliar o efeito do número de incógnitas sobre o tempo de CPU foram utilizados os parâmetros ótimos acima determinados. Pode-se observar pela Fig. 7 que os problemas isotrópicos ($\varepsilon = 1$) apresentam t_{CPU} menor para os tamanhos de problemas estudados. Observa-se que, à medida que o problema torna-se mais anisotrópico ($\varepsilon \rightarrow 0$ e $\varepsilon \rightarrow \infty$), o t_{CPU} aumenta. No entanto, para anisotropias $\varepsilon = 0,1; 10$ o t_{CPU} é aproximadamente o mesmo do problema isotrópico.

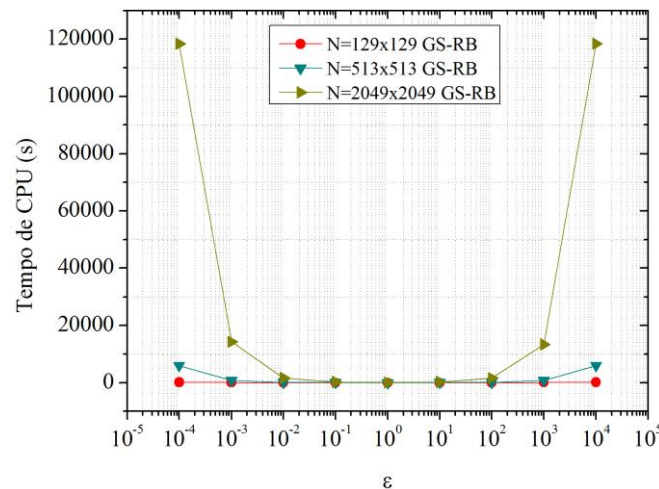


Figura. 7: t_{CPU} versus coeficiente de anisotropia (ε)

Pode-se observar pela Fig. 8 que, para o problema isotrópico ($\varepsilon = 1$) o t_{CPU} é o menor para todos os valores de N estudados. Para anisotropias simétricas os t_{CPU} aproximam-se muito entre si. Por exemplo, para $\varepsilon = 0,1$ e $\varepsilon = 10$ as linhas quase se sobrepõem na Fig. 8. Observa-se também, que, quanto mais anisotrópico o problema, maior o t_{CPU} para todos os valores de N estudados.

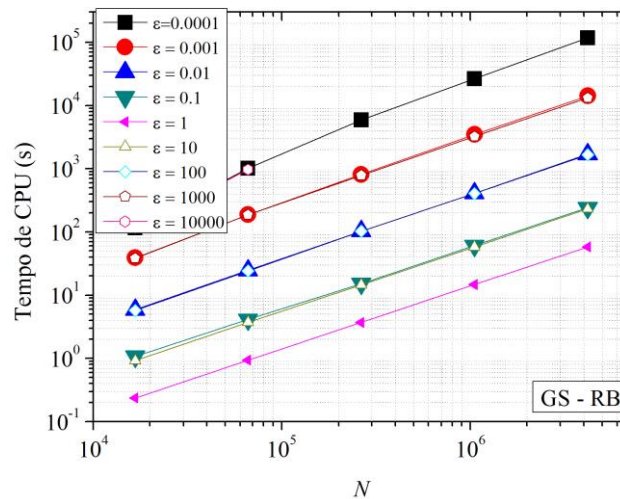


Figura. 8: t_{CPU} versus número de nós (N)

Pode-se fazer um ajuste geométrico do tipo

$$t_{CPU} = cN^p. \quad (8)$$

O parâmetro c é um coeficiente relativo ao método e ao *solver*, p representa a ordem de complexidade do *solver* associado ao método empregado e N é a dimensão do problema. Quanto mais próximo da unidade estiver o expoente p , melhor é o desempenho do método empregado. O método *multigrid* ideal é aquele cujo $p=1$, ou seja, o tempo de CPU cresce linearmente com o número de incógnitas (N).

Utilizou-se diversos valores de N para um dado ε , e para os diversos valores de ε . O resultado é mostrado na Fig. 9, considerando o *solver* estudado. Lembrando que o método *multigrid* ideal é aquele cujo $p=1$. Pode-se observar pela Fig. 9 que, para as anisotropias intermediárias o método *multigrid* tem um bom desempenho, mas para as fortes anisotropias, a ordem de complexidade (p) se distancia da unidade e o desempenho do método torna-se ruim. Este comportamento já era esperado, já que para fortes anisotropias, métodos iterativos têm sua eficiência reduzida.

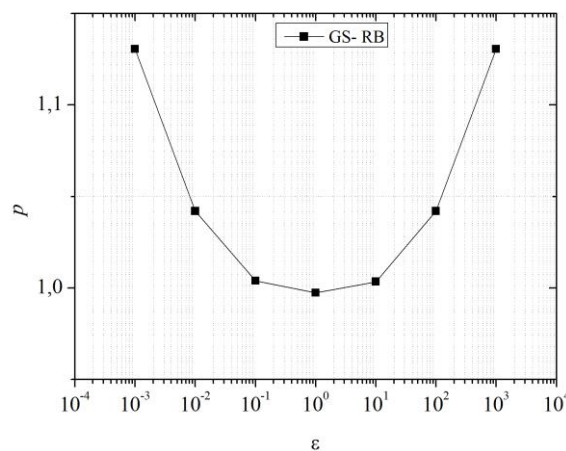


Figura. 9: Ordem de complexidade (p) versus coeficiente de anisotropia (ε)

4 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi analisado o efeito da anisotropia física sobre o método *multigrid* para o problema de difusão bidimensional com anisotropia nos termos difusivos (anisotropia difusiva). Primeiramente foi realizada uma Análise de Fourier Local para determinar o fator de suavização (μ_{loc}) e fator de convergência assintótico (ρ_{loc}) para duas malhas, para isso os seguintes parâmetros *multigrid* foram estudados: *solver*, restrição e prolongação. Na sequência foi realizada a análise de complexidade, onde os seguintes parâmetros *multigrid* foram estudados: números de iterações internas do *solver*, número de níveis e efeito do número de incógnitas no tempo de CPU. O método *multigrid* geométrico foi empregado com esquema de correção (CS), ciclo V, estimativa inicial nula e $r=2$. Os *solvers* estudados foram Gauss-Seidel Red-Black (GS-RB) e Gauss-Seidel Lexicográfico (GS-Lex). As conclusões obtidas são apresentadas abaixo:

- Os resultados obtidos via LFA coincidem com os resultados obtidos via análise de complexidade, ou seja, a Análise de Fourier Local (LFA) é útil na obtenção de parâmetros para a elaboração de um projeto de método *multigrid* eficiente.

- Os parâmetros ótimos obtidos via LFA são: GS-RB, restrição por ponderação completa e prolongação bilinear e estes foram os parâmetros utilizados para a análise de complexidade.

- $v_{ótimo} = 1$ para o caso isotrópico ($\varepsilon = 1$).

- O número ótimo de iterações internas cresce à medida que o problema torna-se mais anisotrópico ($\varepsilon \rightarrow 0$ e $\varepsilon \rightarrow \infty$).

- Para o problema isotrópico ($\varepsilon = 1$) a ordem de complexidade p do método *multigrid* é $p \cong 1.0$. Para fortes anisotropias ($\varepsilon \rightarrow 0$ e $\varepsilon \rightarrow \infty$) a ordem de complexidade p se distancia da unidade e o desempenho do método torna-se ruim.

- $p(L_{máximo}) \approx p(L_{ótimo})$, ou seja, anisotropia física não influencia muito o número ótimo de malhas.

AGRADECIMENTOS

A primeira autora agradece ao Instituto Federal de Santa Catarina pelo suporte financeiro. Os autores agradecem ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos para Engenharia (PPGMNE) da UFPR.

REFERÊNCIAS

- Briggs, W. L., Henson, V.E., McCormick, S.F., 2000, “A Multigrid Tutorial”, 2ª ed., SIAM.
- Fiscer, R., Hucle, T., 2006. Multigrid Methods for Anisotropic BTTB Systems. Linear Algebra and its Applications. n.417, pp. 314-333.
- Fiscer, R., Hucle, T., 2008. Multigrid Solution Techniques for Anisotropic Structered Linear Systems. Applied Numerical Mathematic. n.58, pp. 407-421.

Fortuna, A., O., 2000. Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos, São Paulo: Edusp.

Karaa, S., Zhang, J., 2002. Convergence and performance of iterative methods for solving variable coefficient convection-diffusion equation with a fourth-order compact difference scheme. *An International Journal Computers and Mathematics with applications*, vol. 44, pp.457-479.

Oliveira, F., Pinto, M.A.V., Marchi, C.H., Araki,L.K., 2012. Optimized partial semicoarsening multigrid algorithm for heat diffusion problems and anisotropic grids. *Applied Mathematical Modelling* vol. 36, pp. 4665–4676.

Pinto, M. A. V., Marchi, C. H., 2006. Efeito dos Parâmetros do Método Multigrid CS e FAS sobre o tempo de CPU para a Equação de Laplace Bidimensional. Proceedings of ENCIT.

Rabi, J. A., de Lemos, M. J. S., 2001. Optimization of convergence acceleration in multigrid numerical solutions of conductive-convective problems. *Applied Mathematics and Computational*, vol. 124, pp. 215-226.

Schneider, G. E., Zedan, M. 1981, “A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of fiel problems”, Numerical. Heat Transfer v. 4.

Suero, R., Pinto, M. A. V., Marchi, C. H., 2008. Efeito da anisotropia física sobre o método multigrid na solução da equação de advecção-difusão 2D. *XXIX CILAMCE*.

Trottenberg, U., Oosterlee, C., & Schüller, A., 2001. Multigrid, Academic Press.

Wesseling, P., 1992. An Introduction to Multigrid Methods, John Wiley & Sons.

Wesseling, P., Oosterlee, C. W.,2001, "Geometric Multigrid with Applications to Computational Fluid Dynamics", *Journal of Computation and Applied Mathematics*, Vol. 128, pp. 311-334.

Wienands,R., Wolfgang, J., 2005. Practical fourier analysis for multigrid methods. Chapman & Hall/CRC.

Vassoler-Rutz, G., Pinto, M. A. V., Suero, R., 2015. Comparison of the physical anisotropy of multigrid method for two-dimensional diffusion equation. Proceedings of COBEM.