

ANÁLISE DO DESEMPENHO DO MÉTODO *MULTIGRID* GEOMÉTRICO COM A FORMULAÇÃO FUNÇÃO DE CORRENTE E VELOCIDADE

Cosmo D. Santiago¹, cosmo@utfpr.edu.br
Carlos Henrique Marchi², marchi@ufpr.br
Leandro Franco de Souza³, lefraso@icmc.usp.br

¹ Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) – Campus Apucarana - Rua Marcílio Dias, 635, CEP 86812-460 - Apucarana, PR, Brasil.

² Universidade Federal do Paraná, Departamento de Engenharia Mecânica, Curitiba, PR

³ Universidade de São Paulo (USP) - Departamento de Matemática Aplicada e Estatística – Campus de São Carlos - Av. Trabalhador São-Carlense, 400, CEP 13566-590 São Carlos, SP, Brasil

Resumo: *O objetivo principal deste trabalho é implementar e analisar o desempenho do método multigrid com a formulação função de corrente e velocidade, forma alternativa recente para resolver as equações de Navier-Stokes e na qual ainda não foi testado o método multigrid. A metodologia é testada no problema clássico da cavidade quadrada com tampa móvel. A equação diferencial da função de corrente é discretizada com o método de diferenças finitas em malhas uniformes, com aproximações numéricas de segunda ordem de acurácia. O sistema de equações algébricas é resolvido com o solver successive over relaxation (SOR) associado ao método multigrid geométrico, com ciclo V e esquema de aproximação completa (FAS). As informações são transferidas entre as malhas com ponderação completa na restrição e interpolação bilinear na prolongação, utilizando-se razão de engrossamento dois. São apresentados resultados em função do número de pontos (N) da malha, número de iterações internas (v) no solver, número de malhas (L) e número de Reynolds (Re). Verificou-se que o método multigrid na nova formulação tem desempenho semelhante a outras formulações.*

Palavras-chave: *diferenças finitas, Navier-Stokes, CFD, função de corrente.*

1. INTRODUÇÃO

O método *multigrid* (Briggs et al, 2000; Trottenberg et al, 2001; Hackbusch, 1985) tem se destacado na literatura como um dos métodos mais rápidos e eficientes para resolver problemas que surgem da discretização de equações diferenciais parciais, comuns na área de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) (Hirsch, 1988). Em geral, os modelos matemáticos, quando discretizados com Método de Diferenças Finitas (MDF), Método de Volumes Finitos (MVF) ou Método de Elementos Finitos (MEF), resultam em um sistema de equações algébricas do tipo

$$A^h \phi^h = f^h, \quad (1)$$

onde A^h é um operador discreto, que pode ser linear ou não-linear, ϕ^h é uma aproximação da solução, f^h é o vetor de termos independentes e h é a distância entre dois pontos consecutivos no domínio discretizado. O sistema de equações algébricas dado pela Eq. (1) geralmente envolve milhões de variáveis. Para sistemas grandes e esparsos, os métodos diretos baseados na Eliminação de Gauss (Burden e Faires, 2003) aumentam consideravelmente a requisição de memória e, conseqüentemente, o custo computacional (Zhang, 2003). Outra forma de resolver o sistema dado pela Eq. (1) é usar métodos iterativos, tais como, Gauss-Seidel, Jacobi, SOR (*Successive Over Relaxation*) e outros (Burden e Faires, 2003), entretanto, segundo Ghia et al (1982), o uso de métodos iterativos para resolver o sistema discreto associado às equações de Navier-Stokes (Botella e Peyret, 1998), por exemplo, conduz a uma taxa de convergência muito lenta. Além disso, a taxa de convergência geralmente é fortemente dependente de parâmetros, tais como, o número de Reynolds e o tamanho de h . Muito esforço tem sido feito visando aperfeiçoar técnicas numéricas para obter simulações de escoamentos laminares ou turbulentos, em malhas cada vez mais refinadas. Dentro deste contexto, o método *multigrid* tem chamado bastante a atenção de pesquisadores porque acelera consideravelmente a taxa de convergência de métodos iterativos. Ferziger e Peric (1999) afirmam que o custo computacional é proporcional ao número de pontos da malha.

Brandt (1977), em seu trabalho pioneiro, mostrou as principais vantagens do método, com análises de vários parâmetros na resolução de problemas de advecção e advecção-difusão. Em suas análises Brandt verificou que o Esquema de Correção (*Correction Scheme* - CS) é mais adequado para problemas lineares e o Esquema de Aproximação Completa (*Full Approximation Scheme* - FAS) para não-lineares. Os dois esquemas podem ser associados às metodologias ciclo V, ciclo W, ciclo F, *Full Multigrid* (FMG) e outros. Ambos são dependentes de parâmetros que influenciam no tempo de CPU, tais como, suavizadores, número de passos de suavização, ciclos, malha grossa, operadores de restrição e prolongação. Informações mais detalhadas sobre os esquemas CS e FAS e tipos de ciclos podem ser encontradas em Briggs et al (2000) ou Trottenberg et al (2001).

No problema de Laplace bidimensional, Tannehill et al (1997) observaram que com o esquema CS, na malha 129x129 pontos, o método *multigrid* com 4 ou 5 níveis apresentou quase a mesma performance que com 7 níveis. Santiago e Marchi (2007) analisaram alguns parâmetros e o efeito do acoplamento entre as equações no desempenho do *multigrid* usando um modelo linear com duas equações. Eles concluíram que os parâmetros do método *multigrid* não são afetados pelo número de equações. Mesquita e De-Lemos (2004) usaram uma variante do esquema CS para obter a solução numérica das equações de Navier-Stokes, com os ciclos V e W, usando até quatro níveis de malhas.

As vantagens do método *multigrid* não são evidentes quando é aplicado a problemas que envolvem as equações de Navier-Stokes com elevados números de Reynolds ou problemas com perturbações singulares. Soluções em malhas muito refinadas ainda produzem taxa de convergência que difere muito da taxa ideal do *multigrid*. De acordo com Ferziger e Peric (1999) os melhores ganhos com o método *multigrid* são obtidos em problemas totalmente elípticos, e os menores em problemas dominados pela advecção. Fatores de aceleração típicos estão na faixa de 10 a 100 quando cinco níveis de malha são usados. O fator de aceleração (S) mede quantas vezes o método *multigrid* é mais rápido na obtenção da solução de um problema do que sem ele. Em um problema puramente difusivo, a equação de Laplace 2D, por exemplo, com malha de 129x129 pontos, $S = 325$ (Tannehill et al, 1997). Teoricamente, esse valor de S deveria se manter igual em qualquer problema se considerada a mesma malha. Entretanto, em um problema de escoamento bidimensional, governado pelas equações de Navier-Stokes, com malha uniforme de 128x128 volumes, foram obtidos valores de $S = 42$ e 15, para números de Reynolds 100 e 1000, respectivamente (Ferziger e Peric, 1999), demonstrando, portanto, a deterioração da taxa de convergência do método *multigrid*.

Importantes contribuições usando o método *multigrid* nas equações de Navier-Stokes, no clássico problema da cavidade quadrada, podem ser encontradas na literatura. Ghia et al (1982) usaram a formulação função de corrente e vorticidade com um *solver* implícito fortemente acoplado. As análises foram feitas com Reynolds variando de 100 a 10000 e malha de até 257x257 pontos. Eles reduziram o tempo de CPU por um fator de quatro em relação ao método *singlegrid*. Vanka (1986) descreveu um método *multigrid* baseado na formulação em variáveis primitivas. Ele propôs como *solver* um método Gauss-Seidel Simetricamente Acoplado (SCGS) associado ao método *multigrid* e obteve soluções em malhas de até 321x321 pontos. Vanka observou que, exceto para $Re=5000$, cuja solução foi obtida somente para malhas até 161x161 pontos, o tempo de CPU aumentou quase que linearmente com o aumento do número de pontos da malha, confirmando, portanto, as características atrativas do método. Entretanto, o tempo de CPU aumentou com o número de Reynolds, devido ao aumento da não-linearidade das equações. Para $Re=5000$ e malha 321x321 a taxa de convergência foi muito lenta e precisou uma forte sobre-relaxação. Yan e Thiele (1998) propuseram um esquema FMG modificado baseado no ciclo V, em que somente o resíduo é restrito para a malha grossa, diferentemente do FAS, que restringe o resíduo e a solução. Yan et al (2007) fizeram uma validação geral do algoritmo apresentado em Yan e Thiele (1998), envolvendo esquemas de convecção de alta-ordem, várias geometrias, diferentes tipos de malhas, modelos turbulentos e laminares, 2D e 3D, e compararam a performance do novo esquema com FMG e *singlegrid*. No problema da cavidade quadrada, por exemplo, eles verificaram um ganho significativo no fator *speed-up* quando aumentou o número de pontos da malha. Para $Re=400$ e 1000, na malha 256x256 volumes, eles encontraram fatores de *speed-up* iguais 289 e 284, com o FMG modificado e, 187 e 169 com FMG, respectivamente. Mas, verificaram também que, o fator *speed-up* diminui ligeiramente com o aumento do número de Reynolds, concordando, portanto, com as observações de Vanka (1986). Kumar et al (2009) usaram a formulação nas variáveis primitivas com um esquema de alta ordem para os fluxos convectivos e segunda ordem para os fluxos difusivos. Eles analisaram a acurácia das soluções numéricas com número de Reynolds até 10000 em malhas com até 513x513 pontos. Concluíram que é possível obter soluções com discretização de alta ordem em malhas muito finas usando o método *multigrid*.

Recentemente Gupta e Kalita (2005) apresentaram uma nova formulação para as equações de Navier-Stokes, chamada por eles de função de corrente e velocidade. Nesta formulação as equações são expressas apenas em termos da função de corrente, envolvendo derivadas de até quarta ordem. Eles resolveram o problema da cavidade e o principal objetivo foi analisar a acurácia da solução em malhas de até 161x161 pontos com $Re \leq 10000$ e sem *multigrid*.

O objetivo do presente trabalho é aplicar o método *multigrid* geométrico e analisar alguns de seus parâmetros nas equações de Navier-Stokes, escritas na formulação função de corrente e velocidade ($\psi - \mathbf{v}$) com $Re \leq 5000$ em malhas de até 1025x1025 pontos. Sobre o tempo de CPU, estuda-se a influência causada pelo número de pontos da malha (N), número de iterações internas (V), número de níveis de malhas (L) e número de Reynolds. Os resultados são comparados a outros disponíveis na literatura. Os autores deste trabalho não têm conhecimento na literatura de soluções na formulação $\psi - \mathbf{v}$ com o método *multigrid*, bem como em malhas maiores do que 161x161 pontos.

Este artigo está organizado da seguinte forma: na seção 2 são apresentados os modelos matemático e numérico, incluindo as condições de contornos e procedimento de resolução com o método *multigrid*. Na seção 3, as soluções são

comparadas às da literatura. Na seção 4 são apresentados resultados sobre o desempenho do método *multigrid*. E na seção 5, apresenta-se a conclusão do trabalho.

2. MODELOS MATEMÁTICO E NUMÉRICO

Uma nova formulação para as equações de Navier-Stokes bidimensionais, escoamento de fluido viscoso e incompressível foi apresentada por Gupta e Kalita (2005), denominada *função de corrente e velocidade*. Nesta formulação, o modelo matemático reduz-se a apenas uma equação diferencial parcial de quarta ordem, que é dada por

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = Re \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) u + Re \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) v, \quad (2)$$

onde, ψ é a função de corrente e Re é o número de Reynolds. As componentes das velocidades u e v são obtidas da função de corrente através de

$$u(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3)$$

Para discretizar a Eq. (2), Gupta e Kalita (2005) adotaram um Método de Diferenças Finitas Compacto, usando um esquema de nove pontos com erro de truncamento de segunda ordem. As componentes das velocidades, Eq. (3), foram aproximadas com um esquema de quarta ordem. Eles adotaram o método Gradiente Bi-Conjugado Estabilizado (BiCGest) (Burden e Faires, 2003) para resolver o sistema discreto com um parâmetro de relaxação $\lambda \in (0; 1,5)$. Gupta e Kalita afirmam que os métodos iterativos convencionais, tais como Jacobi e Gauss-Seidel são muito lentos para resolver o sistema discreto proveniente da Eq. (2), e podem até divergir.

No presente estudo o problema de escoamento incompressível foi resolvido na cavidade quadrada com tampa deslizante (*lid-driven cavity*), em que o domínio de cálculo e as condições de contornos do tipo Dirichlet estão representados na Fig. (1).

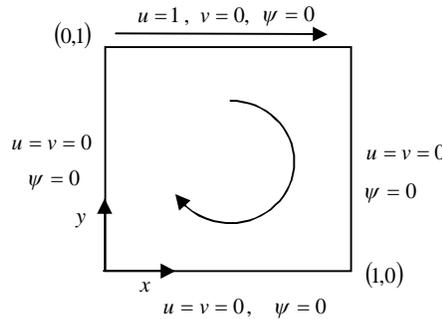


Figura 1. Domínio de cálculo e condições de contorno.

O problema da cavidade quadrada com tampa em movimento é extensivamente usado como *benchmark* para testar e validar códigos computacionais para as equações de Navier-Stokes (Rubin e Khosla, 1977; Ghia et al, 1982; Erturk et al, 2005). Um dos principais atrativos é a singularidade que aparece em dois cantos. Para moderados números de Reynolds muitos resultados podem ser encontrados na literatura obtidos com vários tipos de procedimentos de solução. Resultados com altos números de Reynolds podem ser encontrados em Erturk et al (2005).

O domínio de cálculo ilustrado na Fig. (1) foi particionado em um número de pontos dado por $N = N_x N_y$, em que N_x e N_y são o número de pontos nas direções coordenadas x e y , respectivamente, com $N_x = N_y$. Cada ponto da malha é definido como $(x_i, y_j) = ((i-1)h_x, (j-1)h_y)$, onde $h_x = 1/(N_x - 1)$ e $h_y = 1/(N_y - 1)$, em que $i = 1, \dots, N_x$, $j = 1, \dots, N_y$, h_x e h_y são as distâncias entre dois pontos consecutivos da malha nas direções coordenadas x e y , respectivamente.

A discretização das Eqs. (2) e (3) foi feita como em Gupta e Kalita (2005). O sistema de equações algébricas para a função de corrente foi resolvido com o *solver* SOR associado ao método *multigrid* geométrico com ciclo V e esquema FAS. Como estimativa inicial adotou-se $\psi = 0$. O *solver* ideal para ser usado com o método *multigrid* é aquele que possui boas propriedades de suavização de erros oscilatórios, por exemplo, o método de Gauss-Seidel (Wesseling e Oosterlee, 2001; Briggs et al, 2000). O método SOR é uma variante do método Gauss-Seidel. Adotou-se também a razão de engrossamento 2 (valor padrão na literatura), isto é, a quantidade de pontos em uma malha qualquer é o dobro

da quantidade da malha imediatamente mais grossa. Uma iteração externa é caracterizada por um ciclo V completo, e uma iteração interna (V) é uma suavização realizada pelo *solver* SOR com um parâmetro de relaxação $\lambda \in (0; 1,4)$.

Em um ciclo V típico do esquema FAS resolve-se o sistema de equações algébricas, Eq. (1), na malha mais fina com poucas iterações. O resíduo, dado por $R^h = f^h - A^h \phi^h$, e a aproximação atual são transferidos para a malha grossa mais próxima. Nesta malha a solução transferida é atualizada com o resíduo e resolvido novamente para obter uma nova aproximação. Este procedimento é repetido até a malha mais grossa possível ou a estabelecida. Nesta malha, a correção é interpolada e usada para aproximar a solução na malha fina subsequente. Os sistemas de equações são resolvidos em todos os níveis de malha.

Para a transferência de informações entre as malhas são usados operadores para a restrição e a prolongação. Na literatura estão disponíveis vários operadores de transferência. Por exemplo, para a restrição encontra-se, a injeção, a ponderação completa, ponderação mista e meia ponderação, e para a prolongação, interpolação bi-linear, tri-linear e cúbica (Briggs et al, 2000). Os operadores mais usados são a injeção e a interpolação bi-linear.

Aqui, as informações foram transferidas na restrição por ponderação completa e na prolongação, interpolação bi-linear. A restrição por injeção divergiu, em todos os testes. Na malha mais fina, ou seja, no final de cada ciclo V, as componentes das velocidades foram atualizadas com o método TDMA (Tannehill et al, 1997). Nos testes realizados verificou-se que os melhores resultados, em termos de tempo de CPU, foram obtidos com $\nu = 1$ na malha mais fina e 20ν na malha mais grossa. Verificou-se também que os métodos Gauss-Seidel e MSI (*Modified Strongly Implicit*) (Schneider e Zedan, 1981) são extremamente lentos, principalmente para valores elevados do número de Reynolds.

O processo iterativo foi interrompido quando $\|R^k\|_{\infty} / \|R^1\|_{\infty} \leq 10^{-7}$, onde R^k é o resíduo de ψ na iteração k e R^1 é o resíduo da primeira iteração.

3. COMPARAÇÕES COM SOLUÇÕES BENCHMARK

A implementação do método *multigrid* foi feita na linguagem FORTRAN 95, usando o compilador Visual Compaq FORTRAN 6.6. As simulações foram feitas em um microcomputador com processador Intel Core 2 Duo 2,66 GHz, 8 GB RAM, com precisão dupla. Todos os resultados deste trabalho, referidos na Tab. 1, foram obtidos com o método *multigrid*. A acurácia da solução numérica é verificada comparando-se com soluções da literatura.

Tabela 1. Comparação da solução numérica de u e v no centro da cavidade e valores mínimos ψ .

Re	Autores	Formulação	Malha	u	v	ψ_{\min}	x	y
100	Presente	$\psi - \mathbf{v}$	129x129	-0,209165	0,057459	-0,103488	0,617188	0,73438
			1025x1025	-0,209189	0,057534	-0,103522	0,615234	0,73731
	Ghia et al (1982)	$\psi - \omega$	129x129	-0,20581	0,05454	-0,103423	0,6172	0,7344
	Zhang (2003)	$\psi - \omega$	129x129			-0,103511	0,617187	0,73438
	Gupta e Kalita (2005)	$\psi - \mathbf{v}$	161x161			-0,103	0,6125	0,7375
	Marchi et al (2009)	$p - \mathbf{v}$	1024x1024	-0,209149	0,057537	-0,103521	0,61621	0,73730
400	Presente	$\psi - \mathbf{v}$	129x129	-0,115702	0,052068	-0,113793	0,554688	0,60938
			1025x1025	-0,115064	0,052059	-0,113986	0,553711	0,60547
	Ghia et al (1982)	$\psi - \omega$	129x129	-0,11477	0,05186	-0,113909	0,5547	0,6055
	Gupta e Kalita (2005)	$\psi - \mathbf{v}$	161x161			-0,113	0,5500	0,6125
	Marchi et al (2009)	$p - \mathbf{v}$	1024x1024	-0,115054	0,052058	-0,11399	0,55371	0,60547
1000	Presente	$\psi - \mathbf{v}$	129x129	-0,062541	0,025562	-0,118348	0,53125	0,56250
			1025x1025	-0,062064	0,025795	-0,118929	0,53125	0,56543
	Ghia et al (1982)	$\psi - \omega$	129x129	-0,062080	0,02526	-0,117929	0,5313	0,5625
	Zhang (2003)	$\psi - \omega$	129x129			-0,118806	0,53125	0,56250
	Gupta e Kalita (2005)	$\psi - \mathbf{v}$	161x161			-0,117	0,5250	0,5625
	Botella e Peyret (1998)	$p - \mathbf{v}$	160x160	-0,062056	0,02580	-0,118937	0,5308	0,5652
	Kumar et al (2009)	$p - \mathbf{v}$	513x513	-0,06205	0,02578			
	Erturk et al (2005)	$\psi - \omega$	601 x 601	-0,0620	0,0258	-0,11878	0,5300	0,5650
	Marchi et al (2009)	$p - \mathbf{v}$	1024x1024	-0,062056	0,025799	-0,11894	0,53125	0,56543
	5000	Presente	$\psi - \mathbf{v}$	129x129	-0,032288	0,010732	-0,11846	0,515625
513x513				-0,032109	0,011666	-0,12203	0,515625	0,53516
Ghia et al (1982)		$\psi - \omega$	129x129	-0,03039	0,00945	-0,11897	0,5117	0,5352
Zhang (2003)		$\psi - \omega$	129x129			-0,11812	0,515625	0,53906
Gupta e Kalita (2005)		$\psi - \mathbf{v}$	161x161			-0,122	0,5125	0,5375
Kumar et al (2009)		$p - \mathbf{v}$	513x513	-0,03208	0,01163			
Erturk et al (2005)	$\psi - \omega$	601 x 601	-0,0319	0,0117	-0,12129	0,5150	0,5350	

A Tab. 1 apresenta, para $Re = 100, 400, 1000$ e 5000 , a solução numérica das velocidades no centro da cavidade, e os valores mínimos da função de corrente e sua localização no domínio.

Gupta e Kalita (2005) afirmam que a formulação $\psi - \mathbf{v}$ permite obter soluções com alta acurácia. Eles obtiveram soluções com vários Reynolds em malhas até 161×161 pontos com o método *singlegrid*. Nota-se na Tab. 1 que os valores de ψ_{\min} obtidos no presente estudo são tão acurados quanto os de Gupta e Kalita. Ghia et al (1982) apresentaram soluções em uma malha de 129×129 pontos com aproximação de segunda ordem de acurácia. Marchi et al (2009) usaram Múltiplas Extrapolações de Richardson (MER) para reduzir o erro de discretização em malha com 1024×1024 volumes. Zhang (2003) usou aproximação de quarta ordem para obter a solução numérica na malha 129×129 pontos. Como pode ser observado na Tab. 1, as soluções numéricas para as variáveis citadas estão coerentes com todos estes autores. Na comparação entre malha grossa e fina, verifica-se que as soluções na malha 129×129 são tão acuradas quanto as soluções na malha fina 1025×1025 , pelo menos até o terceiro dígito significativo, indicando que a formulação $\psi - \mathbf{v}$, com método numérico usado neste estudo, produz soluções acuradas também em malhas grossas.

A Fig. (2) ilustra as linhas de contorno da função de corrente ψ para $Re=5000$ na malha 513×513 pontos. Qualitativamente, as soluções obtidas neste trabalho exibem as características conhecidas da cavidade quadrada, incluindo o vórtice principal na parte central da cavidade e os vórtices secundários nos cantos. A formação do vórtice terciário no canto inferior direito mostra que o método numérico associado ao método *multigrid* foi eficiente na resolução do problema, conseguindo detectar os efeitos da vorticidade nos cantos do fundo da cavidade.

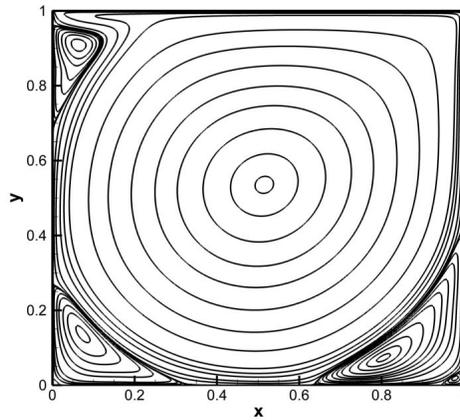


Figura 2. Linhas de contorno da função de corrente para $Re = 5000$ e malha 513×513 .

Finalmente, para avaliar os resultados do escoamento no interior da cavidade foi feita uma análise dos perfis de velocidades. Os resultados para ambos os números de Reynolds, simulados em uma malha de 129×129 pontos, foram confrontados com os resultados de Ghia et al (1982) e Marchi et al (2009). Na Fig. (3) estão apresentados os perfis de velocidade de u e v ao longo das linhas vertical e horizontal, respectivamente. Na Fig. (3a) compara-se com os resultados de Ghia, também na malha 129×129 e, na Fig. (3b), com os resultados de Marchi, que obteve soluções na malha 1024×1024 volumes.

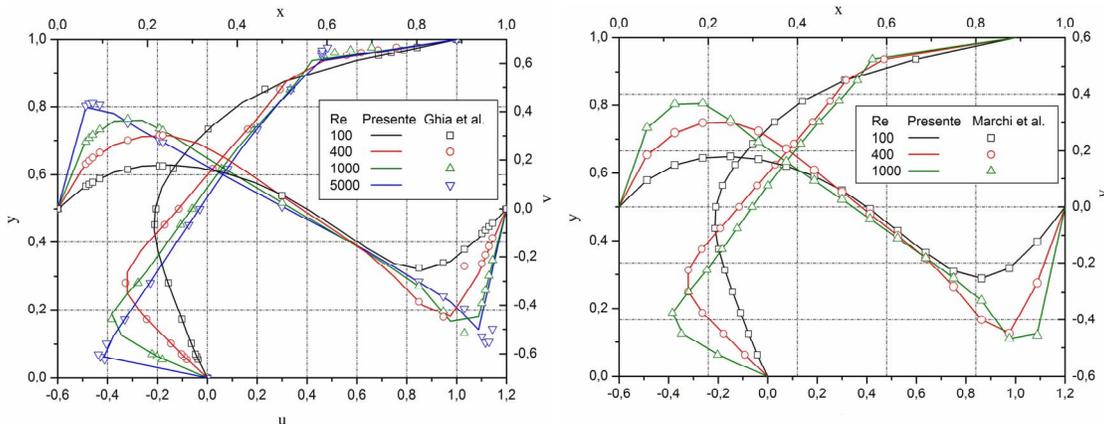


Figura 3. Comparação dos perfis de velocidades com dois autores.

As curvas indicam que existe uma excelente concordância com os dados de Ghia, com pequenos desvios para $Re=1000$ e 5000 nas regiões próximas aos contornos, onde se encontram os maiores gradientes de velocidade, os quais podem estar associados à difusividade numérica do esquema de aproximação utilizado, como relatado por Zhang (2003). Contudo, em relação aos resultados de Marchi, as curvas exibem uma ótima concordância, inclusive próximo aos contornos.

4. RESULTADOS SOBRE O MULTIGRID

Aproximadamente 400 simulações foram feitas para avaliar a influência, sobre o tempo de CPU, do número de iterações internas (ν), número de malhas (L) e número de pontos da malha (N).

Aqui, define-se o valor ótimo de um parâmetro quando a solução do problema é obtida no menor tempo de CPU para valores fixos dos demais parâmetros. Assim, denota-se por $\nu_{\text{ótimo}}$ o número ótimo de iterações internas no *solver*, e por $L_{\text{ótimo}}$ o número ótimo de níveis de malhas.

4.1. Iterações Internas (ν)

O efeito do parâmetro ν foi estudado com malhas $N = 65 \times 65$, 129×129 , 257×257 , 513×513 e 1025×1025 pontos, cada uma delas com $Re=100$, 400 e 1000 . A Fig. (4) ilustra a influência do número de iterações internas (ν) sobre o tempo de CPU. Nas Figs. (4a), (4b) e (4c), são mostrados os resultados para $Re=100$, 400 e 1000 , respectivamente. Pode-se ver que o tempo de CPU é muito sensível ao valor de ν , ao número de Reynolds e ao número de pontos da malha, especialmente quando $Re > 100$.

O valor de $\nu_{\text{ótimo}}$, em cada curva, está indicado através do símbolo “estrela”. Nota-se que $\nu_{\text{ótimo}}$ não é o mesmo em todas as malhas. Para $Re=100$ e 400 , quanto maior a malha, maior é o $\nu_{\text{ótimo}}$; $Re=1000$ não exhibe este comportamento. Para $\nu < \nu_{\text{ótimo}}$, Fig. (4a), o problema não convergiu. As curvas do tempo de CPU, para $Re=100$, apresentam um padrão de crescimento semelhante ao observado por Santiago e Marchi (2008) para a equação de Laplace bidimensional.

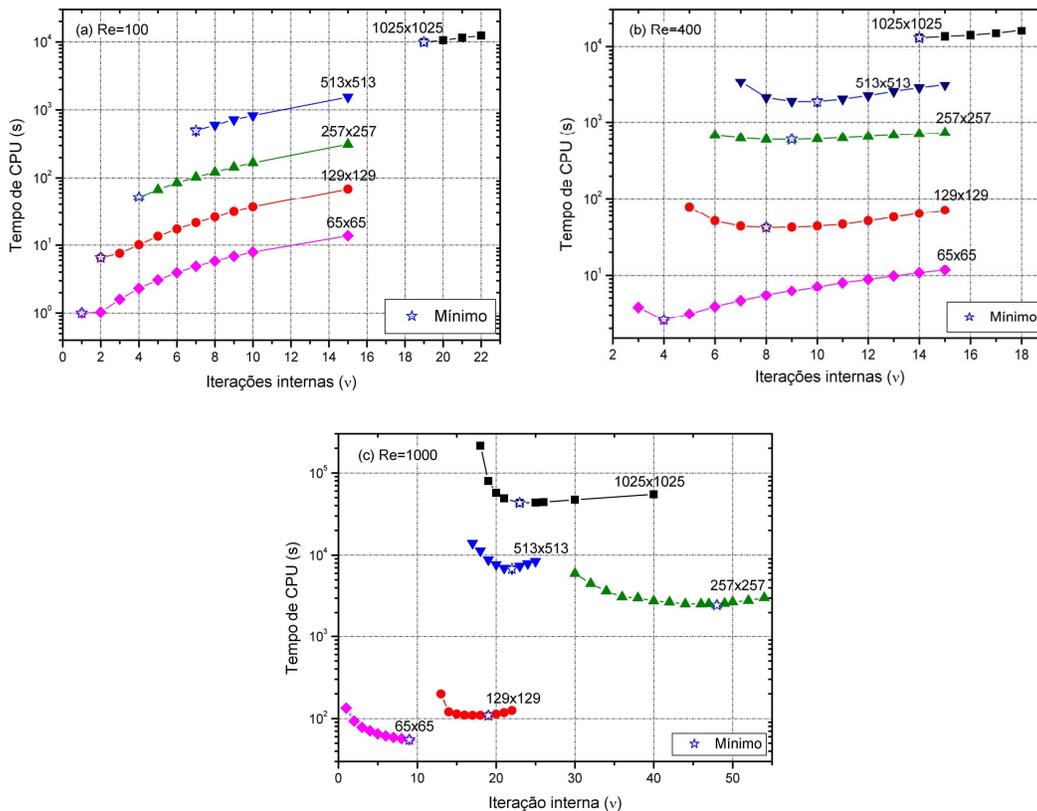


Figura 4. Influência do número de iterações internas.

4.2. Número de Níveis (L)

O estudo sobre a influência do número de níveis de malha (L) leva em consideração o número de iterações internas ótimo encontrado na seção anterior. Aqui, a análise foi feita para $N = 129 \times 129$, 257×257 e 513×513 , com os mesmos Reynolds. As simulações foram feitas com um número de níveis de malha L tal que $1 \leq L \leq L_{\text{máximo}}$, em que $L = 1$ tem-se o *singlegrid* e $L = L_{\text{máximo}}$ tem-se o método *multigrid* percorrendo todas as malhas possíveis. O parâmetro $L_{\text{máximo}}$ representa o número máximo possível de malhas que se pode usar para uma dada malha, com a malha mais grossa tendo apenas um nó interno. Por exemplo, se $N = 513 \times 513$ pontos, o método *multigrid* com todos os níveis percorre as malhas 513×513 , 257×257 , 129×129 , 65×65 , 33×33 , 17×17 , 9×9 , 5×5 e 3×3 pontos; neste caso específico $L_{\text{máximo}} = 9$.

A Fig. (5) ilustra a influência do número de níveis (L) sobre o tempo de CPU. O símbolo “estrela” indica o L que resultou no menor tempo de CPU em cada curva, ou seja, o $L_{\text{ótimo}}$. Para $Re=100$, Fig. (5a), assim como verificado na análise do v , as curvas exibem um padrão coerente com a literatura em análises feitas com outros problemas, independente de N (Santiago e Marchi, 2008; Pinto e Marchi, 2007): o valor ótimo do número de níveis foi obtido com o *multigrid* percorrendo todas as malhas, ou seja, $L_{\text{ótimo}} = L_{\text{máximo}}$. Porém, a diferença relativa entre $L_{\text{ótimo}}$ e $L_{\text{máximo}} - (1 a 4)$ é em média 5%, para qualquer malha. Quando $L < L_{\text{máximo}} - 4$ o tempo de CPU aumenta significativamente.

As Figs. (5b) e (5c) ilustram os resultados para $Re=400$ e 1000 , respectivamente. Nota-se que o tempo de CPU também apresenta uma variação pouco significativa à medida que se diminui o número de níveis até um certo L , ficando praticamente estável quando $L > L_{\text{máximo}} - (1 a 4)$. Ou seja, o número de níveis ótimo pode ser considerado $L_{\text{ótimo}} = L_{\text{máximo}} - (1 a 4)$. Quando $N=513 \times 513$, observa-se um intervalo maior para o número de níveis, isto é, $L_{\text{ótimo}} = L_{\text{máximo}} - (1 a 6)$, permanecendo com o tempo de CPU praticamente estável com uma variação, em média, menor que 3% entre $L_{\text{máximo}} - (1 a 6)$ e $L_{\text{máximo}}$. Quando $N=129 \times 129$ é mais evidente que o menor tempo de CPU ocorre com o máximo número de níveis, isto é, $L_{\text{ótimo}} = L_{\text{máximo}}$.

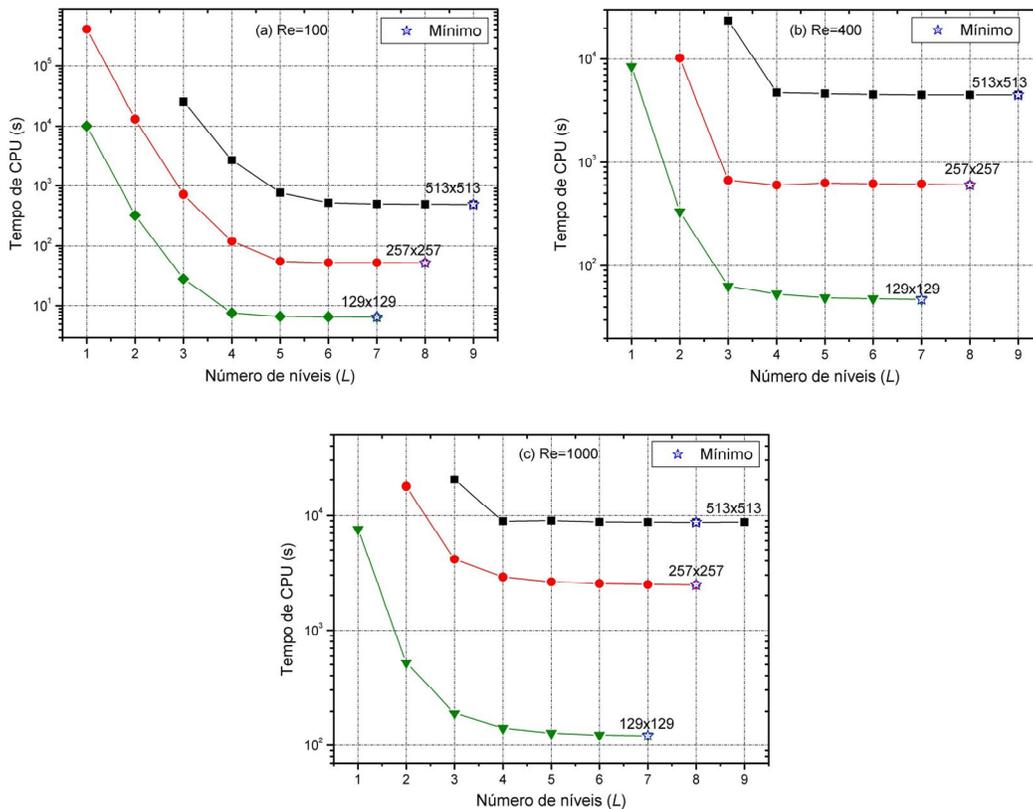


Figura 5. Influência do número de níveis de malha.

No que diz respeito ao número de níveis, os resultados obtidos estão coerentes com a literatura. Pinto e Marchi (2006) recomendam usar $L = L_{\text{máximo}}$ para a equação de Laplace bidimensional. Tannehill et al (1997) verificaram que o esforço computacional usando $L=4$ ou 5 é praticamente o mesmo que $L = L_{\text{máximo}}$ para o mesmo problema com $N=129 \times 129$. E Rabi e De-Lemos (2001) sugerem não menos que 4 níveis no problema bidimensional de advecção-

difusão. Esta análise mostra que qualitativamente, o parâmetro número de níveis (L), no método *multigrid* com o esquema FAS, nas equações de Navier-Stokes quando escritas em termos da função de corrente e velocidade, exibe uma ótima concordância, se comparado com os resultados de Pinto e Marchi (2007) e Santiago e Marchi (2008), obtidos para a equação de Laplace e equações de Navier.

4.3. Tamanho do problema (N)

Na análise da influência do tamanho do problema, isto é, do número de incógnitas no sistema de equações, sobre o tempo de CPU são considerados o número ótimo de iterações internas ($v_{\text{ótimo}}$) e o número ótimo de níveis de malha ($L_{\text{ótimo}}$) obtidos nas seções anteriores. Para malhas muito grossas, em alguns casos, não foi possível obter solução para $Re=400$ ou 1000 . O método *singlegrid* requer tempo de CPU demasiadamente alto quando N é grande, por isso, a análise limitou-se a problemas de tamanhos $N = 17 \times 17$ até $N = 129 \times 129$. Na Fig. (6), são apresentadas as curvas do tempo de CPU dos métodos *multigrid* e *singlegrid*.

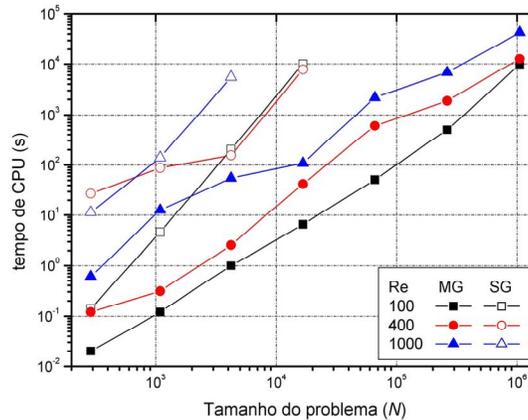


Figura 6. Comparação entre o tempo de CPU do *multigrid* e *singlegrid*.

De acordo com Ferziger e Peric (1999), quanto mais refinada a malha, maior é a vantagem do método *multigrid* em relação ao método *singlegrid*. Esta propriedade pode ser observada, por exemplo, com $Re=100$ e 400 : na malha 65×65 , verificou-se que o método *multigrid* é 203 e 60 vezes mais rápido que o *singlegrid*. Já na malha 129×129 , esses valores são 1540 e 184, respectivamente. Se $Re=1000$, na malha 129×129 , este fator é 70. A Fig (6) dá a indicação ainda, de que, para os Reynolds testados, em malhas muito refinadas a diferença do tempo de CPU, no *multigrid*, tende a diminuir.

Verificou-se também que o esforço computacional não é proporcional ao tamanho da malha. Quando se dobra o número de pontos da malha em cada direção, ou seja, de $N=129 \times 129$ para $N=257 \times 257$, com $Re=100$, o tempo de CPU é 8 vezes maior e, quando N passa de 257×257 para 513×513 , o tempo de CPU é 9,6 vezes maior. Para $Re=400$, tem-se 14 e 7,5 e para $Re=1000$, tem-se 22,7 e 3,6.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foram analisados alguns parâmetros do método *multigrid* geométrico sobre o tempo de CPU necessário para resolver as equações de Navier-Stokes na formulação função de corrente e velocidade ($\psi - \mathbf{v}$). Os parâmetros considerados foram: número de iterações internas (v); número de níveis de malha (L); número de pontos da malha computacional (N); e número de Reynolds (Re). O modelo matemático foi discretizado com um método de diferenças finitas com acurácia de segunda ordem em malhas uniformes. O sistema de equações algébricas para a função de corrente foi resolvido com o método SOR associado ao método *multigrid* geométrico com ciclo V. A restrição foi feita com ponderação completa, a prolongação por interpolação bilinear e razão de engrossamento dois.

Com base nos resultados, verificou-se principalmente que:

- 1) Os resultados numéricos obtidos apresentam boa concordância com aqueles disponíveis na literatura.
- 2) Os parâmetros v , L , N e Re influenciam fortemente o tempo de CPU.
- 3) $v_{\text{ótimo}}$ não é o mesmo em todas as malhas e varia com Re .
- 4) Quaisquer que sejam N e Re , o tempo de CPU mínimo é ou está muito próximo do mínimo quando se usa L máximo.
- 5) O *speed-up* do método *multigrid*, em relação ao *singlegrid*, é muito bom, e aumenta com o aumento de N .
- 6) O *speed-up* do método *multigrid* diminui com o aumento de Re .

6. AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece a infra-estrutura cedida pelo Laboratório de Experimentação Numérica (LENA), da Universidade Federal do Paraná (UFPR), fundamental para a realização desta pesquisa, e o apoio dado pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Agradece também as orientações dadas pelos professores Dr. Carlos H. Marchi (UFPR) e Leandro F. Souza (USP, São Carlos). O segundo autor é bolsista do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico). Os autores agradecem o apoio financeiro do CNPq, da Fundação Araucária (Paraná) e da Agência Espacial Brasileira (AEB) através do Programa Uniespaço.

7. REFERÊNCIAS

- Botella, O. and Peyret, R., 1998, "Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow", *Computers & Fluids*, Vol. 27, pp. 421-433.
- Brandt, A., 1977, "Multi-Level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of Computation*", Vol. 31, No.138, pp. 333-390.
- Briggs, W.L., Henson, V.E. and McCormick, S.F., 2000, "A Multigrid Tutorial". 2ª Ed., SIAM.
- Burden, R.L. e Faires, J.D., 2003, "Análise Numérica", Ed. Pioneira Thomson Learning, São Paulo, Brasil.
- Erturk, E., Corke, T. C. and Gockçol, C., 2005, "Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity Flow at high Reynolds numbers", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 48, pp. 747-774.
- Ferziger, J.H. and Peric, M., 1999, "Computational Methods for Fluids Dynamics". 2ª ed., Springer.
- Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T., 1982, "High-*Re* solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method", *Journal of Computational Physics*, Vol. 48, pp. 387-411.
- Gupta, M.M. and Kalita, J.C., 2005, "A new paradigm for solving Navier-Stokes equations: streamfunction-velocity formulation", *Journal of Computational Physics*, Vol. 207, pp. 52-68.
- Hackbusch, W., 1985, "Multi-Grid Methods and Applications", Springer-Verlag, Berlin.
- Hirsch, C., 1988. "Numerical Computational of Internal and External Flows", Vol. 1, Wiley.
- Kumar, D.S., Kumar, K.S. and Das, M.K., 2009, "A fine grid solution for a lid-driven cavity flow using multigrid method", *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, Vol 3, No. 3, pp. 336-354.
- Marchi, C.H., Suero, R. and Araki, L.K., 2009, "The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024 x 1024 grid", *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol.31, No. 3, pp.186-198.
- Mesquita, M.S. and De-Lemos, M.J.S., 2004, "Optimal Multigrid Solutions of Two-dimensional Convection-conduction Problems", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 152, pp. 725-742.
- Pinto, M.A.V. e Marchi, C.H., 2006, "Efeito de parâmetros do método multigrid CS e FAS sobre o tempo de CPU para a equação de Laplace Bidimensional", *Proceedings of the 11th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering*, Curitiba, Brazil.
- Pinto, M.A.V. and Marchi, C.H., 2007, "Optimum parameters of a geometric multigrid for the two-dimensional Laplace's equation", *Proceedings of 19th International Congress of Mechanical Engineering*, Brasília, Brazil.
- Rabi, J.A. and DeLemos, M.J.S., 2001, "Optimization of convergence acceleration in multigrid numerical solutions of conductive-convective problems", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 124, No. 2, pp. 215-226.
- Rubin, S.G. and Khosla, P.K., 1977, "Polynomial Interpolation Methods for Viscous Flow Calculations", *Journal of Computational Physics*, Vol. 24, pp. 217-244.
- Santiago, C.D. and Marchi, C.H., 2007, "Optimum parameters of a geometric multigrid for a two-dimensional problem of two-equations", *Proceedings of 19th International Congress of Mechanical Engineering*, Brasília, Brazil.
- Santiago, C.D. e Marchi, C.H., 2008, "Parâmetros ótimos do método multigrid geométrico CS e FAS para problemas 2D com duas equações", *Proceedings of XXIX Iberian Latin American Congresso in Computational Methods in Engineering*, Maceió, Brazil.
- Schneider, G.E. and Zedan, M., 1981, "A Modified Strongly Implicit Procedure for Numerical Solution of Field Problems", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 4, pp. 1-19.
- Tannehill, J.C., Anderson, D.A. and Pletcher, R.H., 1997, "Computational fluid mechanics and heat transfer Washington", Taylor & Francis, 2 Ed., pp. 40, 46-48, 151, 166, 172.
- Trottenberg, U., Oosterlee C. W. and Schüller A., 2001, "Multigrid". Academic Press.
- Vanka, S.P., 1986, "Block-Implicit Multigrid Solution of Navier-Stokes Equations in Primitive Variables", *Journal of Computational Physics*, Vol. 65, pp. 138-158.
- Wesseling, P. and Oosterlee, C. W., 2001, "Geometric Multigrid with Applications to Computational Fluid Dynamics", *Journal of Computation and Applied Mathematics*, Vol. 128, pp. 311-334.
- Yan, J. and Thiele, F. 1998, "Performance and accuracy of an modified full multigrid algorithm for fluid flow and heat transfer". *Numerical heat transfer, Part B*, Vol 34, pp. 323-338.
- Yan, J., Thiele, F. and Xue L. 2007, "A modified full multigrid algorithm for the Navier-Stockes equations". *Computer & Fluids* Vol. 36, pp. 445-454.
- Zhang, J., 2003, "Numerical Simulation of 2D Square Driven Cavity Using Fourth-Order Compact Finite Difference Schemes", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 45, pp. 43-52.

ANALYSIS OF THE PERFORMANCE OF GEOMETRIC MULTIGRID METHOD WITH THE STREAMFUNCTION-VELOCITY FORMULATION

Cosmo D. Santiago¹, cosmo@utfpr.edu.br
Carlos Henrique Marchi², marchi@ufpr.br
Leandro Franco de Souza³, lefraso@icmc.usp.br

¹ Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) – Campus Apucarana - Rua Marcílio Dias, 635, CEP 86812-460 - Apucarana, PR, Brasil.

² Universidade Federal do Paraná, Departamento de Engenharia Mecânica, Curitiba, PR

³ Universidade de São Paulo (USP) - Departamento de Matemática Aplicada e Estatística – Campus de São Carlos - Av. Trabalhador São-Carlense, 400, CEP 13566-590 São Carlos, SP, Brasil

Abstract: *The main objective of this work is to implement and analyze the performance of the multigrid method with the streamfunction-velocity formulation, a recent alternative form to solve the Navier-Stokes equations and for which the multigrid method has not yet been tested. The methodology is used for the classical lid-driven cavity problem. The streamfunction equation is discretized using the finite difference method on uniform grids, with second order accuracy for the numerical approximations. The system of algebraic equations is solved with successive over relaxation (SOR) solver associated to the geometric multigrid method with V-cycle and full approximation scheme (FAS). The transfer of information among grids is made by full weighting in restriction and bi-linear interpolation in prolongation, using coarsening ratio two. Results are presented according to the number of points (N) of the grid, the number of inner iterations (v) in the solver, the number of level (L) and Reynolds number (Re). It was found that the multigrid method in the new formulation has similar performance to other ones.*

Keywords: *Finite Difference, Navier-Stokes, CFD, streamfunction.*