

**ANÁLISE DE PARÂMETROS DO MÉTODO DO GRADIENTE CONJUGADO PRÉ-
CONDICIONADO COM MUTIGRID PARA A EQUAÇÃO DE POISSON
BIDIMENSIONAL**

Márcio A. M. de Anunciação

marcioalexandro@ufpr.br

Universidade Federal do Paraná (UFPR) – Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE)

Av. Cel. Francisco Heráclito dos Santos, 210, Centro Politécnico, 81531-980, Curitiba-PR, Brasil.

Marcio A. V. Pinto

marcio_villela@ufpr.br

Universidade Federal do Paraná – Departamento de Engenharia Mecânica

Centro Politécnico, 81531-980, Curitiba-PR, Brasil.

Reverton L. A. Neundorf

revertonluis@gmail.com

Universidade Federal do Paraná – Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia.

Centro Politécnico, 81531-980, Curitiba-PR, Brasil.

Resumo. Neste trabalho foi resolvido numericamente o problema de condução de calor linear bidimensional, governado pela equação de Poisson, com condições de contorno de Dirichlet. O modelo matemático foi discretizado pelo método de diferenças finitas (MDF), dando origem a um sistema de equações algébricas lineares esparsas, resolvido com o emprego de métodos iterativos, cuja convergência foi acelerada com o emprego do método Multigrid (MG). Sua filosofia está baseada no emprego de várias malhas com diferentes graus de refinamento, as quais são percorridas durante o processo iterativo. Outros métodos para resolução de sistemas de equações têm por finalidade a minimização da norma do erro, sendo chamados de métodos de descida, ou descendentes. O método dos Gradientes Conjugados (GC) é um método iterativo desta classe e de uma classe mais ampla de métodos conhecida como métodos dos subespaços de Krylov. Outra maneira de tornar um método iterativo mais rápido, consiste em modificar a matriz dos coeficientes do sistema de equações, melhorando seu número de condicionamento. Tal procedimento é chamado de pré-condicionamento de matrizes. Desta forma, neste trabalho,

o problema modelo foi resolvido empregando-se o método MG, com os solvers Gauss-Seidel e Decomposição LU incompleta (ILU), e o método GCP com os seguintes pré-condicionadores: MG com os solvers Gauss-Seidel (GCP-MG-GS) e ILU (GCP-MG-ILU). O objetivo deste trabalho foi comparar os resultados do MG e do GCP-MG para os seguintes parâmetros: número de ciclos e fator de convergência.

Palavras-chave: Multigrid, Gradiente conjugado pré-condicionado, Aceleração de convergência.

INTRODUÇÃO

No processo de discretização de um modelo matemático em problemas de Dinâmica dos Fluidos Computacional é comum a obtenção de sistemas de equações algébricas do tipo $Au = f$, onde A é a matriz dos coeficientes, f é o vetor dos termos independentes e u é o vetor das incógnitas. A solução desses sistemas, em geral, é obtida com o emprego de métodos iterativos, que embora mais rápidos que os métodos diretos, geralmente apresentam convergência lenta para problemas de grande porte.

Os métodos iterativos clássicos, como Método de Jacobi ou o Método de Gauss-Seidel (GS) (Burden e Faires, 2007) produzem uma sequência de vetores a partir de uma aproximação inicial. Sob certas condições, esta sequência converge para a solução exata, caso ela exista. Já outros métodos têm por finalidade a minimização da norma do erro, sendo chamados de métodos de descida ou descendentes (Saad, 2003). Um exemplo é o método dos Gradientes Conjugados (GC) que é um método iterativo da classe dos Métodos de Subespaços de Krylov (MSK).

Nas últimas décadas, uma alternativa que se tem mostrado muito eficiente na aceleração de processos iterativos é o método *Multigrid* (MG) (Briggs et al., 2000; Trottenberg et al., 2001; Hackbush, 1985). Sua filosofia está baseada no emprego de várias malhas com diferentes graus de refinamento, as quais são percorridas durante o processo iterativo.

Outra maneira de tornar um método iterativo mais rápido consiste em modificar a matriz dos coeficientes do sistema de equações, melhorando seu número de condicionamento. Tal procedimento é chamado de pré-condicionamento de matrizes (Saad, 2003).

Desta forma, neste artigo, pretende-se mesclar essas técnicas a fim de analisar o comportamento de alguns parâmetros computacionais que medem a velocidade de convergência dos métodos e normas envolvendo o erro numérico e o resíduo das soluções numéricas.

1 MÉTODOS NUMÉRICOS

1.1 Método de Gauss-Seidel (GS)

A discretização das equações diferenciais parciais a serem resolvidas faz surgir o seguinte sistema de equações algébricas:

$$Au = f, \tag{1}$$

onde u e $f \in R^n$.

Seja a matriz A dividida na forma

$$A = P - N, \tag{2}$$

send P , não-singular, denominada matriz de pré-condicionamento ou pré-condicionador.

Para solução da Eq. (1), tem-se o seguinte método que é chamado de método iterativo básico:

$$Pu^{(k+1)} = Nu^{(k)} + f, \quad (3)$$

onde o sobrescrito de u é a representação das iterações.

Considera-se o método no seguinte modo:

$$u^{(k+1)} = Bu^{(k)} + P^{-1}f, \quad (4)$$

onde $B = P^{-1}N$, $N = P - A$, e B é a matriz de iteração do método dado pela Eq. (4).

Se as entradas diagonais de A são diferentes de zero, pode-se isolar em cada equação o correspondente valor desconhecido, obtendo-se o sistema linear equivalente

$$u_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[f_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} u_j \right], \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

No método de GS uma vez que uma estimativa inicial $u^{(0)}$ é escolhida, $u^{(k+1)}$ é calculado por:

$$u_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[f_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j^{(k+1)} - \sum_{j=1+1}^n a_{ij} u_j^{(k)} \right], \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

ou seja, no passo $k + 1$, os valores disponíveis de $u^{(k+1)}$ estão sendo usados para atualizar a solução. Este método equivale a realizar a seguinte divisão para A : $P = D - E$, $N = F$, e a matriz de iteração associada é

$$B_{GS} = (D - E)^{-1}F. \quad (7)$$

1.2 Decomposição LU incompleta (ILU)

A decomposição LU incompleta (ILU) consiste em decompor uma matriz A de forma incompleta, como o nome sugere. Tal decomposição é da forma $A = LU + R$, onde L e U têm, respectivamente, a estrutura das partes inferior e superior de A e R representa o resíduo ou erro da decomposição. Sobre a matriz R , impõem-se condições como ter termos nulos em posições determinadas a fim de se manter certas características da matriz original A .

Um algoritmo geral para ILU, pode ser obtido aplicando-se Eliminação Gaussiana (Saad, 2003) e dispondo-se alguns elementos em posições pré-determinadas. Para isso determina-se um conjunto de pontos $P \subset \{(i, j) \mid i \neq j, \text{ com } 1 \leq i, j \leq n\}$ onde os elementos da matriz serão nulos. Neste caso podemos ter diversas variações da decomposição ILU, como por exemplo: ILU(0), onde a estrutura da decomposição LU é idêntica à estrutura da matriz A , ou seja, não permite preenchimentos extras; ILU(1), onde é permitido o preenchimento de uma diagonal adicional em cada fator LU, etc. Neste artigo, optou-se por ILU(1), que chamaremos ILU 7 pontos (dado que o estêncial do problema é de 5 pontos).

Assim, dada a decomposição LU incompleta, resolve-se $Au = f$ em um processo iterativo composto por duas etapas:

(1) $Lz^{(k)} = r^{(k)}$ para obter z ;

(2) $U\delta^{(k)} = z^{(k)}$ para obter δ ,

onde $r^{(k)} = f - Au^{(k)}$ e $\delta^{(k)} = u^{(k+1)} - u^{(k)}$.

1.3 Método do Gradiente Conjugado (GC)

Métodos descendentes baseiam-se em obter uma solução u de um sistema do tipo $Au = f$, pela propriedade da minimização de uma norma apropriada do erro. A partir de uma estimativa inicial $u^{(0)}$, esses métodos determinam a solução do problema pela diminuição do erro.

Seja a norma vetorial dada por $\|u\|_2 = \langle u, Su \rangle$, onde $S \in R^{n \times n}$ é uma matriz simétrica definida positiva. Considerando a equação residual $Ae^{(k)} = r^{(k)}$, pode-se deduzir que

$$\|e^{(k)}\|_2 = \langle e^{(k)}, Se^{(k)} \rangle = \langle r^{(k)}, Rr^{(k)} \rangle, \quad (8)$$

onde $R = A^{-T}SA^{-1}$, o que significa dizer que minimizar o erro equivale a minimizar o resíduo na mesma norma.

Nos métodos descendentes parte-se de uma estimativa inicial $u^{(0)}$ da solução e gera-se uma sucessão de vetores $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}, \dots$, caminhando sucessivamente ao longo da diminuição do erro $\|e^{(k)}\|_2$, de modo que essa sucessão convirja para u .

Uma das formas de se escolher a melhor direção em cada ponto $u^{(k)}$, seria escolher a direção de $p^{(k)}$ que desce mais, ou seja, aquela que está alinhada com a direção do gradiente da função $\|e^{(k)}\|_2$, porém em sentido oposto. Por isso estes métodos são chamados de métodos dos Gradientes.

Desta forma, a expressão iterativa dos métodos dos gradiente é dada por (Saad, 2003):

$$u^{(k+1)} = G_k u^{(k)} + c_k, \quad (9)$$

em que $G_k = I - \alpha_k S$ e $c_k = \alpha_k SA^{-1}f$.

O método GC é um método iterativo descendente, aplicado aos casos onde a matriz de iteração A é simétrica positiva definida. Este método prevê uma escolha mais criteriosa das direções de descida $p^{(k)}$.

Para exemplificar, consideremos um problema bidimensional. As linhas $\|e^{(k)}\|_2 = \|r^{(k)}\|_2 =$ constante, são elipses concêntricas com centro em u , conforme ilustrado na Fig. 1.

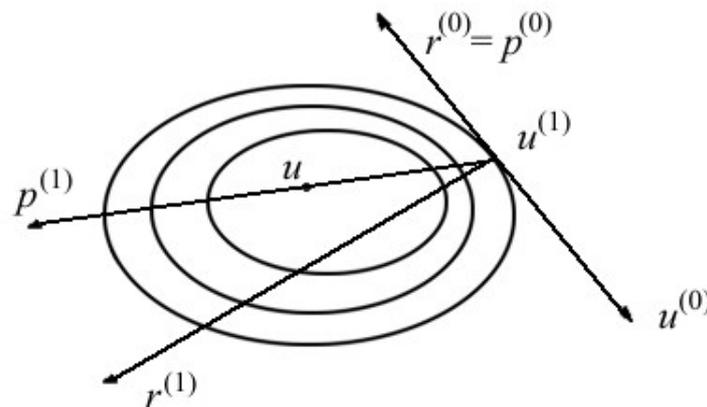


Figura 1. Representação gráfica do método GC

Supondo-se dispor de uma estimativa inicial $u^{(0)}$, de acordo com o método do máximo descenso, partiríamos deste ponto e pesquisariamos o mínimo de $\|e^{(k)}\|_2$, ao longo da direção $r^{(0)}$, obtendo $u^{(1)}$. Observando a Fig. 1, verifica-se que a melhor progressão de $u^{(1)}$ não seria a direção mais inclinada, mas sim uma direção $p^{(1)}$ que apontasse para o centro da elipse.

De fato, o novo ponto minimizador $u^{(2)}$ coincidiria com a solução exata de u , e assim o processo iterativo terminaria com apenas duas iterações. Pode-se, então, desta forma, escolher a direção $p^{(1)}$ como:

$$p^{(1)} = u - u^{(1)}. \quad (10)$$

Como pode-se observar, atendendo a ortogonalidade dos resíduos sucessivos verificados anteriormente, temos $0 = \langle r^{(1)}, r^{(0)} \rangle = \langle r^{(1)}, p^{(0)} \rangle = \langle f - Au^{(1)}, p^{(0)} \rangle = \langle A(u - u^{(1)}), p^{(0)} \rangle$ de tal modo que

$$\langle p^{(1)}, Ap^{(0)} \rangle = 0. \quad (11)$$

As direções buscadas são

$$p^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta_k p_k, \quad (12)$$

onde β é dado por

$$\beta_k = \frac{\langle r^{(k+1)}, r^{(k+1)} \rangle}{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}. \quad (13)$$

As iterações do método GC satisfazem a seguinte estimativa de erro:

$$\|e^{(k)}\| \leq \left(\frac{(cond_2 A)^{1/2} - 1}{(cond_2 A)^{1/2} + 1} \right) \|e^{(0)}\|. \quad (14)$$

Com isso, pode-se perceber que o método GC, teoricamente, calcula a solução exata em n iterações, o que na prática não se verifica devido à utilização deste método em aritmética de precisão finita e a introdução de erros de arredondamento que destroem a exata conjugacidade das direções $p^{(k)}$ e a exata ortogonalidade dos resíduos $r^{(k)}$. Desta forma, este método que é, em principio direto, adquire uma forma tipicamente iterativa.

Neste caso, é recomendável efetuar-se as iterações necessárias que satisfaçam a critérios de convergência adequados.

1.4 Pré-condicionamento de matrizes

Uma forma de tornar um método iterativo mais rápido consiste em transformar o sistema $Au = f$ em um sistema equivalente, onde a matriz tenha um número de condicionamento mais favorável. Para ilustrar, podemos utilizar o método GC, onde de acordo com a expressão dada pela Eq. (14), sabemos o comportamento da estimativa do erro na iteração k .

Logo, se pudermos diminuir $cond_2 A$, conseqüentemente o erro $\|e^{(0)}\|$ também irá diminuir, proporcionando uma rápida convergência.

Esta transformação é conseguida pré-multiplicando e pós-multiplicando a matriz A por duas matrizes P e Q inversíveis do seguinte modo:

$$(PAQ)(Q)^{-1}u = Pf. \quad (15)$$

O sistema agora corresponde, portanto a $\bar{A}\bar{u} = \bar{f}$, com $\bar{A} = PAQ$, $\bar{u} = Q^{-1}u$ e $\bar{f} = Pf$.

As matrizes P e Q devem ser escolhidas de modo a proporcionar à matriz \bar{A} melhores propriedades de convergência em relação a matriz original A . Este procedimento é conhecido como pré-condicionamento do sistema de equações original, sendo P e Q conhecidas pelo nome de matrizes de pré-condicionamento. No caso onde $Q = I$, chamamos de pré-condicionamento à esquerda. Se $P = I$, chamamos de pré-condicionamento à direita.

Por razões de custo computacional, é conveniente que o algoritmo de pré-condicionamento evite a formação explícita de \bar{A} , e trabalhe apenas com a matriz original A . Considerando que no método GC a matriz transformada continuar sendo simétrica e definida positiva, o pré-condicionamento também deverá preservar esta propriedade. De fato, pode-se obter isso fazendo com que $P = S$ e $Q = P^T = S^T$ e desta forma, conclui-se que $\bar{A}\bar{u} = \bar{f}$, com $\bar{A} = SAS^T$, $\bar{u} = S^{-T}u$ e $\bar{f} = Sf$.

Assim, verifica-se que $\bar{p}^{(0)} = \bar{r}^{(0)} = \bar{f} - \bar{A}\bar{u}^{(0)} = Sr^{(0)}$.

Por outro lado, escolhendo-se $p^{(0)} = S^T \bar{p}^{(0)} = S^T \bar{r}^{(0)} = S^T Sr^{(0)}$, tem-se que

$\langle \bar{p}^{(0)}, \bar{A}\bar{p}^{(0)} \rangle / \langle p^{(0)}, Ap^{(0)} \rangle$, sendo válida também a relação $\langle \bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)} \rangle = \langle \bar{r}^{(0)}, r^{(0)} \rangle$, com $W\bar{r}^{(0)} = r^{(0)}$ e $W = (S^T S)^{-1}$.

A partir de então tem-se que:

$$\alpha_0 = \langle \bar{r}^{(0)}, r^{(0)} \rangle / \langle p^{(0)}, Ap^{(0)} \rangle, \quad (16)$$

$$u^{(1)} = u^{(0)} + \alpha_0 p^{(0)}, \quad (17)$$

$$r^{(1)} = r^{(0)} - \alpha_0 Ap^{(0)}, \quad (18)$$

$$\beta_0 = \langle \bar{r}^{(1)}, r^{(1)} \rangle / \langle \bar{r}^{(0)}, r^{(0)} \rangle \text{ e} \quad (19)$$

$$p^{(1)} = r^{(1)} + \beta_0 p^{(0)}, \quad (20)$$

mantendo-se essas expressões para as iterações seguintes.

O algoritmo presente na Tab. 1 apresenta o método GC pré-condicionado (GCP), onde nota-se que a cada iteração é necessário resolver o sistema auxiliar:

$$W\tilde{r}^{(j+1)} = r^{(j)}, \quad (21)$$

e deseja-se que sua resolução não seja muito trabalhosa sendo que as situações extremas são: considerar $W = I$, onde recupera-se o método GC, ou então, considerar $W = A$, obtendo a solução em uma única iteração, porém, com o custo computacional de ter que inverter a matriz A . Em geral, procura-se ficar entre estes dois extremos.

Tabela 1. Algoritmo para o método GCP

Ler A, f
Estimar $u^{(0)}$
Fixar uma tolerância γ
Calcular $r^{(0)} = f - Au^{(0)}$
Resolver $W\tilde{r}^{(0)} = r^{(0)}$
Atribuir $p^{(0)} = \tilde{r}^{(0)}$
Para $j = 0, 1, \dots$ até convergir
$\alpha_j = (\tilde{r}^{(j)}, r^{(j)}) / (Ap^{(j)}, p^{(j)})$
$u^{(j+1)} = u^{(j)} + \alpha_j p^{(j)}$
$r^{(j+1)} = r^{(j)} - \alpha_j Ap^{(j)}$
Resolver $W\tilde{r}^{(j+1)} = r^{(j+1)}$
$\beta_j = (\tilde{r}^{(j+1)}, r^{(j+1)}) / (\tilde{r}^{(j)}, r^{(j)})$
$p^{(j+1)} = \tilde{r}^{(j+1)} + \beta_j p^{(j)}$
Fim

1.5. Método *Multigrid* (MG)

O método MG se vale das características de suavização do erro por parte dos métodos iterativos clássicos: ela ocorre rapidamente (nas iterações iniciais) para componentes oscilatórias, enquanto que para componentes suaves, para um número grande de iterações tais métodos perdem sua eficiência. Assim, o método MG trabalha com um esquema de malhas auxiliares mais grosseiras (com menor número de pontos) nas quais as componentes do erro são rapidamente suavizadas, para então retornar-se à malha original. A informação é transferida entre malhas através de operadores, chamados de operadores de restrição (informações de uma malha fina para a grossa seguinte), representados genericamente por $[I]_h^H$ e definidos por

$$v^H = [I]_h^H v^h, \quad (22)$$

ou de prolongação (informações da malha grossa para a fina), representados genericamente por $[I]_H^h$ e definidos por

$$v^h = [I]_H^h v^H. \quad (23)$$

O operador de restrição utilizado neste trabalho foi o operador de ponderação completa e o operador de prolongação foi a interpolação bilinear (Briggs et al., 2000; Trottenberg et al., 2001; Hackbush, 1985).

Neste trabalho utilizou-se ainda o ciclo V. Sendo a equação de Poisson um problema linear, utilizou-se o Esquema de Correção CS (*Correction Scheme*), que transfere apenas o resíduo para as malhas mais grossas (Briggs et al., 2000; Trottenberg et al., 2001).

A razão de engrossamento para o caso bidimensional, considerando malhas uniformes, é definida como $r = H/h$, onde h representa o tamanho do espaçamento da malha fina Ω^h (também

chamado de dimensão dos elementos da malha fina), H o tamanho do elemento da malha imediatamente mais grossa Ω^H . Neste trabalho, utilizou-se a razão de engrossamento padrão, ou seja, $r = 2$ (Briggs et al., 2000).

Os algoritmos para os esquemas CS com ciclo V, para vários níveis de malhas, até se atingir um critério de parada ou alcançar o número máximo de ciclos escolhidos, podem ser encontrados em Briggs et al. (2000), Trottenberg et al. (2001) e Hackbush (1985).

Neste trabalho utilizou-se o método MG com *solver* GS e ILU. Tais métodos iterativos também foram utilizados como pré-condicionadores do método GCP, ou seja, foram usados para resolver o sistema linear dado pela Eq. (21) a cada iteração do método GC.

2 MODELOS MATEMÁTICO E NUMÉRICO

2.1 Modelo matemático

O modelo matemático considerado neste trabalho refere-se ao problema de condução de calor linear bidimensional em regime permanente descrito pela equação de Poisson (Incropera et al., 2008):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = S(x, y), \quad (24)$$

com condições de contorno de Dirichlet

$$T(0, y) = T(x, 0) = T(1, y) = T(x, 1) = 0, \quad (25)$$

onde x e y são as direções coordenadas (variáveis independentes) e T a temperatura (variável dependente), com $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. O termo fonte é dado por:

$$S(x, y) = -2 \left[(1 - 6x^2)y^2(1 - y^2) + (1 - 6y^2)x^2(1 - x^2) \right]. \quad (26)$$

Com isso, tem-se a seguinte solução analítica:

$$T(x, y) = (x^2 - y^4)(y^4 - x^2). \quad (27)$$

2.2 Modelo matemático

A discretização do domínio de cálculo se dará em uma malha uniforme nas duas direções, com $N = N_x N_y$ nós, onde N_x e N_y representam o número de pontos nas direções coordenadas x e y , respectivamente, gerando uma malha com o espaçamento entre os nós (também chamado de dimensão dos elementos da malha) $h_x = 1/(N_x - 1)$ e $h_y = 1/(N_y - 1)$. Neste artigo serão usadas malhas uniformes tais que $N_x = N_y$ e $h_x = h_y = h$.

Para cada um dos $(N_x - 2)(N_y - 2)$ pontos interiores da malha, a Eq. (24) foi discretizada com o método das diferenças finitas (MDF), cuja ideia, segundo Patankar (1980) e Ferziger e Peric (2002), é obter a solução aproximada de uma equação diferencial em pontos ou nós do domínio substituindo (ou aproximando) as derivadas da equação original por fórmulas discretas de diferenças.

Neste trabalho as aproximações foram realizadas por diferença central (*Central Difference Scheme*, CDS), onde as derivadas parciais são aproximadas por:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{(x,y)=(x_i,y_j)} \cong \frac{T(x_i+h,y_j) - 2T(x_i,y_j) + T(x_i-h,y_j)}{h^2} \quad (28)$$

e

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{(x,y)=(x_i,y_j)} \cong \frac{T(x_i,y_j+h) - 2T(x_i,y_j) + T(x_i,y_j-h)}{h^2}, \quad (29)$$

sendo que a posição dos termos aproximados serão dadas conforme descrito na Fig. 2.

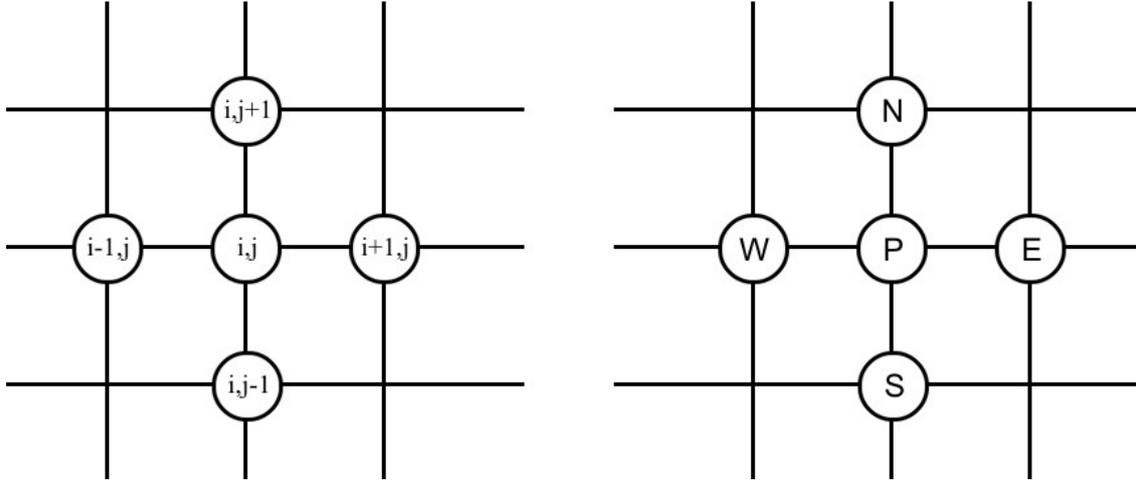


Figura 2. Convenção para nomenclatura dos vizinhos dos nós da malha bidimensional uniforme

O termo fonte, que não tem derivadas, será aproximado diretamente no ponto P , gerando:

$$\frac{T_W - 2T_P + T_E}{h^2} + \frac{T_S - 2T_P + T_N}{h^2} = S_P. \quad (30)$$

Rearranjando os termos da Eq. (30), obtém-se

$$\left(\frac{4}{h^2} \right) T_P = \left(\frac{1}{h^2} \right) T_W + \left(\frac{1}{h^2} \right) T_E + \left(\frac{1}{h^2} \right) T_S + \left(\frac{1}{h^2} \right) T_N - S_P, \quad (31)$$

ou

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_N T_N + a_S T_S + b_P. \quad (32)$$

Considerando-se as Eqs. (31) e (32), tem-se:

$$a_W = a_E = a_S = a_N = \left(\frac{1}{h^2} \right), \quad a_P = \left(\frac{4}{h^2} \right) \text{ e } b_P = -S_P. \quad (33)$$

Estes coeficientes são válidos para os pontos internos da malha, ou seja, para $i = 2, 3, \dots, N_x - 1$ e $j = 2, 3, \dots, N_y - 1$. Para os contornos, considera-se:

$$T_{1,j} = T_{N_x,j} = T_{i,1} = T_{i,N_y} = 0. \quad (34)$$

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Alguns testes computacionais foram realizados para resolver o problema modelo utilizando-se as seguintes metodologias:

1) Método MG com os *solvers*:

1.1) Gauss-Seidel (MG-GS);

1.2) ILU (MG-ILU);

2) Método GCP com os seguintes pré-condicionadores:

2.1) MG com *solver* Gauss-Seidel (GCP-MG-GS);

2.2) MG com *solver* ILU (GCP-MG-ILU).

Neste trabalho utilizou-se o esquema CS, por se tratar de um problema linear (Briggs et al., 2000). O tipo de ciclo utilizado é o V, pois o W é cerca de 50% mais caro em relação ao número de operações envolvidas (Hirsch, 1988).

Utilizou-se restrição por ponderação completa e prolongação através de interpolação bilinear (Trottenberg et al., 2001), ambos muito utilizados na literatura.

O número de iterações internas feitas em cada malha é representado por $v_1 = v_2 = v$, sendo que em todas as simulações, o método MG partiu da malha mais fina (N_m) e foi até a malha mais grossa, ou seja, a malha com 3×3 nós.

O critério de convergência usado para interromper as iterações externas é a norma l_2 do resíduo adimensionalizada pela norma L_2 do resíduo na estimativa inicial, dada por

$$\|R\|_2 = \frac{\|R^{it}\|_2}{\|R^0\|_2}, \quad (35)$$

onde R^{it} é o resíduo da iteração atual e R^0 o resíduo da estimativa inicial. Entre os trabalhos que usam essa norma pode-se citar: Briggs et al. (2000); Oliveira (2010); Oliveira et al. (2012); Trottenberg et al. (2001); Wesseling (1992) e Zhang (2002). O processo iterativo é interrompido quando a norma L_2 é menor ou igual à tolerância ε ($\varepsilon > 0$).

Para efeito de comparação entre as quatro metodologias foram analisados três parâmetros: norma L_2 do erro numérico em função do tamanho do problema, norma L_2 do resíduo adimensionalizada pela norma na estimativa e fator de convergência empírico ($q^{(k)}$), este último definido por (Trottenberg et al., 2001)

$$q^{(k)} = \frac{\|R^k\|_2}{\|R^{k-1}\|_2}, \quad (36)$$

onde $\|R^k\|_2$ é a norma euclidiana do vetor resíduo na k -ésima iteração, com $R^0 \neq 0$. Se $R^0 = 0$, deve-se considerar $R^0 = 1$ por questões puramente computacionais.

O critério de parada utilizado foi 10^{-10} e as soluções foram obtidas com precisão dupla.

Na Figura 3 temos a o comportamento do erro numérico de acordo com o tamanho do problema, para os diversos métodos de solução, onde percebe-se que os quatro métodos

estudados apresentam uma característica esperada para métodos iterativos convergentes, ou seja, ao se aumentar o tamanho do problema o erro numérico é reduzido. Nota-se também, que os erros apresentados possuem valores muito próximos entre si.

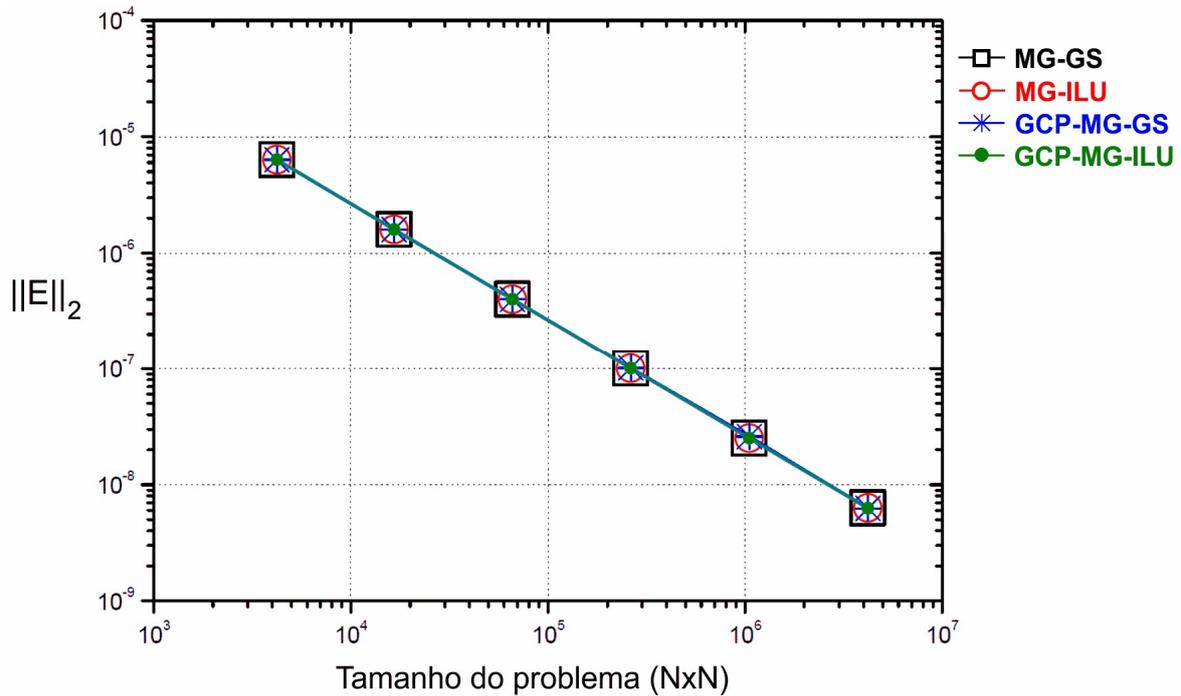


Figura 3. Norma L_2 do erro numérico ($\|E\|_2$) versus tamanho do problema ($N \times N$)

A Figura 4 mostra o comportamento da norma L_2 do resíduo adimensionalizada pela norma da estimativa inicial em função do número de iterações para o problema com 2049x2049 nós.

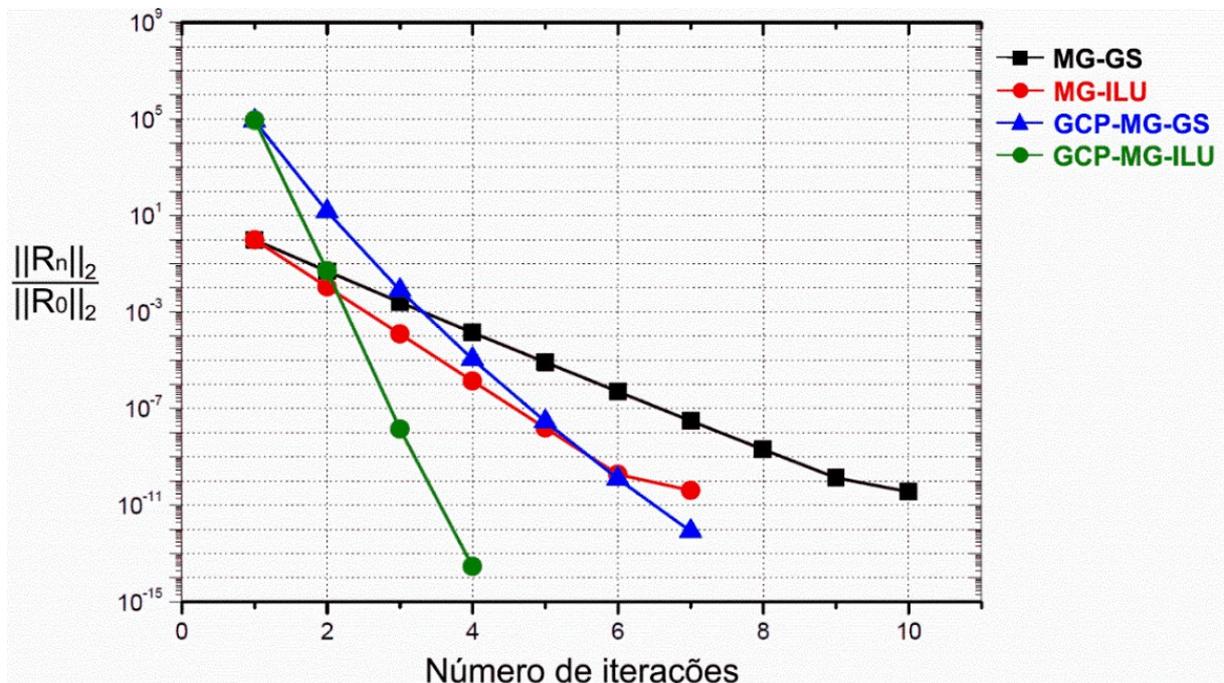


Figura 4. Norma L_2 do resíduo adimensionalizada pela norma da estimativa inicial versus número de iterações para o problema com 2049x2049 nós

Baseando-se nos resultados apresentados na Fig. 4, percebe-se que o método GCP com MG e *solver* ILU foi o que mais rapidamente atingiu o critério de parada (apenas 4 iterações foram necessárias). Em seguida, empataram os métodos GCP com MG e *solver* GS e o método MG com *solver* ILU (7 iterações até atingir o critério de parada). Essas três formulações convergiram mais rapidamente que o método MG com *solver* GS que precisou de 10 iterações para convergir.

A Figura 5 retrata o comportamento do fator de convergência em função do tamanho do problema. De acordo com Briggs et al. (2000), Trottenberg et al. (2001) e Burden e Faires (2007), é desejável que o fator de convergência, dado pela Eq. (36) (que é uma aproximação numérica para o fator de convergência assintótica), apresente valores próximos de zero.

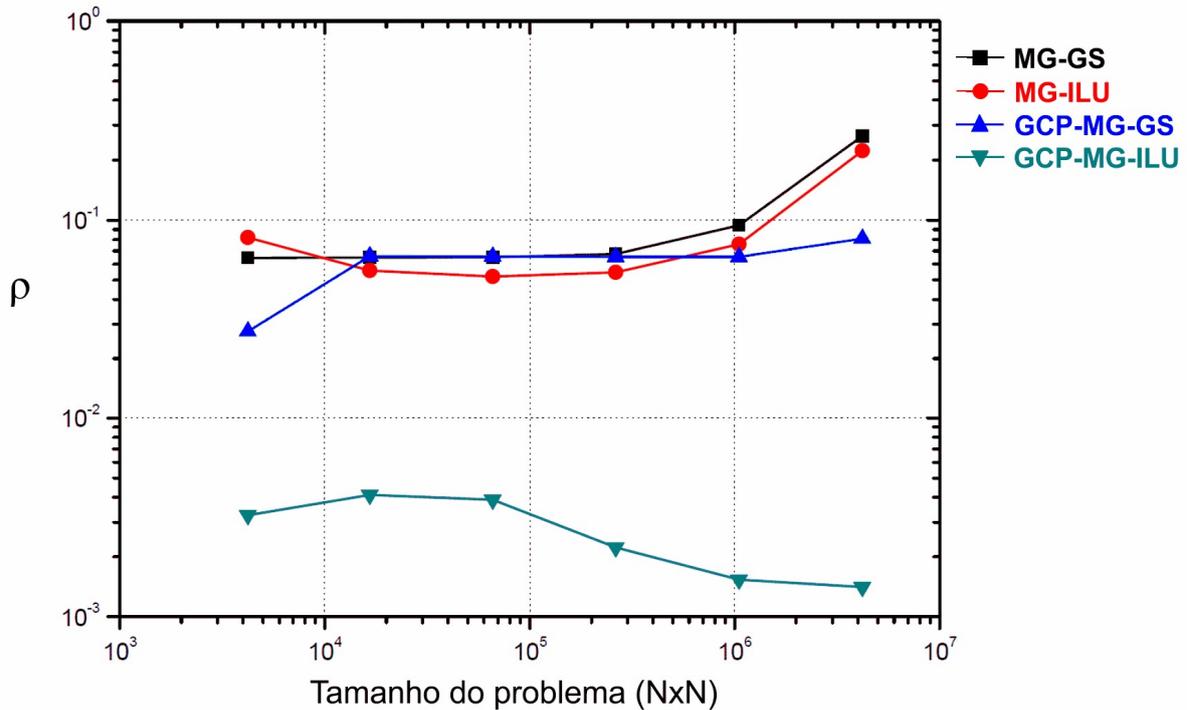


Figura 5. Fator de convergência (ρ) versus tamanho do problema ($N \times N$)

Com base na Fig. 5, conclui-se, portanto, que o método GCP com MG e *solver* ILU foi a melhor das quatro metodologias estudadas, pois o valor do fator de convergência, além de ser menor que o respectivo para as outras três metodologias, tende a diminuir com o aumento do tamanho do problema.

4 CONCLUSÃO

Com base nos resultados obtidos neste trabalho, conclui-se que:

- 1) o uso de pré-condicionadores, associados aos métodos iterativos, podem torná-los mais eficientes;
- 2) o método GCP com MG e *solver* ILU foi a metodologia que atingiu o critério de parada em um número menor de iterações;
- 3) o método GCP com MG e *solver* ILU apresentou os melhores resultados para o fator de convergência empírico e, além disso, o valor deste parâmetro mostrou-se mais eficiente com o aumento do tamanho do problema.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece ao apoio financeiro da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). O terceiro autor agradece ao SIMEPAR (Sistema Meteorológico do Paraná). Os autores também agradecem a infra-estrutura fornecida pelo PPGMNE (Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia) da UFPR (Universidade Federal do Paraná).

REFERÊNCIAS

- Briggs W. L., Henson V. E., & McCormick S. F., 2000. *A Multigrid Tutorial. 2. ed.* Philadelphia: SIAM.
- Burden R. L., & Faires J. D., 2007. *Numerical analysis, eighth edition.* Cengage Learning – Brooks Cole, Florence.
- Ferziger, J. H., & Peric, M., 2002. *Computational Methods for Fluid Dynamics.* Berlin: Springer-Verlag.
- Gerolymos, G.A., & Vallet, I., 2005. Mean-Flow-Multigrid for Implicit Reynolds-Stress-Model Computations. *AIAA Journal*, v. 43, n. 9, pp. 1887-1898.
- Hackbush W., 1985. *Multigrid Methods and Applications.* Berlin: Springer-Verlag.
- Hirsch, C., 1988. *Numerical Computational of Internal and External Flows.* vol1. New York: John Wiley & Sons.
- Incropera, F. P., Dewitt, D. P., Bergman, T.L., & Lavine, A. S. , 2008. *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa. 6. ed.* Rio de Janeiro: LTC Editora.
- Oliveira, F., 2010. *Efeitos de malhas anisotrópicas bidimensionais sobre o desempenho do método Multigrid geométrico.* Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR.
- Oliveira F., Pinto, M. A. V., Marchi, C. H., & Araki, L. K., 2012. Optimized partial semicoarsening Multigrid algorithm for heat diffusion problems and anisotropic grids. *Applied Mathematical Modelling*, vol 36, pp. 4665-4676.
- Patankar, S. 1980. *Numerical heat transfer and fluid flow.* New York: Taylor and Francis.
- Saad, Y., 2003. *Iterative Methods for sparse linear systems.* SIAM.
- Trottenberg U., Oosterlee C., & Schüller A., 2001. *Multigrid.* St Augustin, Germany: Academic Press.
- Wesseling, P., 1992. *An introduction to Multigrid Methods.* New York: John Wiley & Sons.
- Zhang, J., 2002. Multigrid Method and Fourth-Order Compact Scheme for 2D Poisson Equation with Unequal Mesh-Size Discretization. *Journal of Computational Physics*, vol 179, pp. 170-179.