

*Capítulo 8.*

---

**TERMOELASTICIDADE LINEAR 2Dp**

---

Conforme visto no Cap. 5, um problema termoelástico pode ser dividido em dois subproblemas:

- Problema térmico ( $T$ );
- Problema elástico ( $u, v$ )

Problemas térmicos bidimensionais foram abordados no Cap. 7. Como se viu, eles são governados por uma única equação diferencial, Eq. (7.1):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = S \quad (7.1) - \text{repetida}$$

O modelo matemático do problema elástico bidimensional é constituído por duas equações diferenciais acopladas que têm como termo fonte o campo de temperaturas do problema térmico.

Considerações:

- Coordenadas cartesianas bidimensionais (2D);
- Regime permanente (p);
- Condições de contorno do tipo Dirichlet;
- Malhas uniformes; e
- Propriedades constantes (razão de Poisson  $\mu$ , coeficiente de expansão térmica  $\alpha$ , módulo de elasticidade  $E$ ).

### 8.1 MODELO MATEMÁTICO (Huebner et al., 2001)

Admitindo-se um estado plano de tensões:

$$[\sigma] = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}] \quad \text{e} \quad \sigma_z = 0 \quad (8.1)$$

onde  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  são tensões normais nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, e  $\tau_{xy}$  é a tensão cisalhante no plano  $x$ - $y$ . Neste caso, as deformações normais ( $\varepsilon$ ) e de cisalhamento ( $\gamma$ ), são dadas por

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}] \quad \text{e} \quad \varepsilon_z = 0 \quad (8.2)$$

onde

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8.3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (8.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (8.5)$$

com  $u$  e  $v$  representando os deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Para o estado plano de tensões, as equações de equilíbrio estático se resumem a:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (\text{em } u) \quad (8.6)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{em } v) \quad (8.7)$$

Para corpos elásticos, cujos materiais são homogêneos e isotrópicos, pela Lei de Hooke, as tensões são dadas por:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\mu)} \left[ \frac{\mu}{(1-\mu)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} - C_\mu \alpha (T - T_0) \right] \quad (8.8)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\mu)} \left[ \frac{\mu}{(1-\mu)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} - C_\mu \alpha (T - T_0) \right] \quad (8.9)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (8.10)$$

onde

$$C_\mu = \frac{1+\mu}{1-\mu} \quad (8.11)$$

$\mu$  = razão de Poisson;

$E$  = módulo de elasticidade (ou módulo de Young);

$T_0$  = temperatura de referência;

$\alpha$  = coeficiente de expansão térmica.

Usando a Lei de Hooke, Eqs. (8.8) a (8.10), nas Eqs. (8.6) e (8.7), pode-se obter:

$$C_\mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 C_\mu \alpha \frac{\partial T}{\partial x} \quad (8.12)$$

$$C_\mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2 C_\mu \alpha \frac{\partial T}{\partial y} \quad (8.13)$$

O problema termoelástico bidimensional consiste em resolver as Eqs. (8.12) e (8.13) com as condições de contorno desejadas. Mas como as equações do modelo elástico dependem da temperatura, primeiro é necessário resolver a Eq. (7.1). Caso seja

de interesse, posteriormente pode-se obter as tensões com as Eqs. (8.8) a (8.10), e as deformações com as Eqs. (8.3) a (8.5).

## 8.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA

### 8.2.1 Forças na direção $x$

A solução numérica da Eq. (8.12) é abordada nesta seção. Tal equação pode ser reescrita como

$$(1 + C_\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_\mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2 C_\mu \alpha \frac{\partial T}{\partial x} \quad (8.14)$$

Para a derivada da temperatura, com diferença central, Eq. (2.26), obtém-se

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_P \approx \frac{T_E - T_W}{2 h_x} \quad (8.15)$$

onde os nós envolvidos na aproximação numérica da Eq. (8.14) no nó  $P$  são mostrados na Fig. (8.1). Os parâmetros  $h_x$  e  $h_y$  são, respectivamente, as distâncias entre dois nós consecutivos nas direções  $x$  e  $y$ , e que são calculadas com

$$h_x = \frac{L_x}{N_x - 1}$$

e

$$h_y = \frac{L_y}{N_y - 1}$$

onde

$L_x$  e  $L_y$  = comprimento do domínio nas direções  $x$  e  $y$

$N_x$  e  $N_y$  = número de nós nas direções  $x$  e  $y$

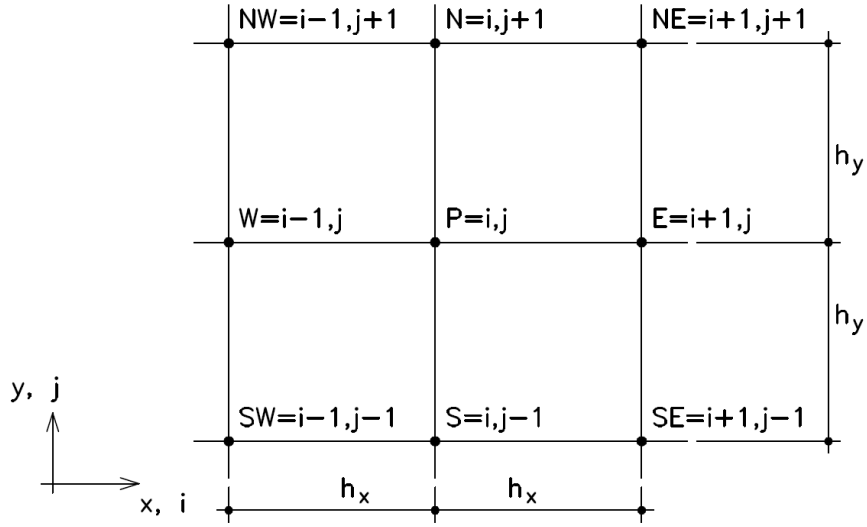


Figura 8.1. Nós envolvidos na aproximação numérica das Eqs. (8.14) e (8.25).

As duas primeiras derivadas de 2ª ordem da Eq. (8.14) são aproximadas usando-se diferença central (CDS-2), através da Eq. (2.38), resultando em:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_P \approx \frac{u_W + u_E - 2u_P}{h_x^2} \quad (8.16)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_P \approx \frac{u_S + u_N - 2u_P}{h_y^2} \quad (8.17)$$

A derivada cruzada de \$v\$, na Eq. (8.14), também é aproximada por diferença central:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]_P \approx \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_E - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_W}{2 h_x} \quad (8.18)$$

onde, novamente com diferença central, tem-se:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_E \approx \frac{v_{NE} - v_{SE}}{2 h_y} \quad (8.19)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_W \approx \frac{v_{NW} - v_{SW}}{2 h_y} \quad (8.20)$$

Assim, com as Eqs. (8.19) e (8.20) em (8.18), chega-se a:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]_P \approx \frac{v_{SW} + v_{NE} - v_{SE} - v_{NW}}{4 h_x h_y} \quad (8.21)$$

Finalmente, com as substituições das Eqs. (8.15), (8.16), (8.17) e (8.21) na Eq. (8.14), obtém-se:

$$a_P^u u_P = a_W^u u_W + a_E^u u_E + a_S^u u_S + a_N^u u_N + b_P^u \quad (8.22)$$

onde

$$\left. \begin{aligned} a_W^u &= a_E^u = \frac{1 + C_\mu}{h_x^2} \\ a_S^u &= a_N^u = \frac{1}{h_y^2} \\ a_P^u &= a_W^u + a_E^u + a_S^u + a_N^u \\ b_P^u &= C_\mu \left[ \frac{v_{NE} + v_{SW} - v_{SE} - v_{NW}}{4 h_x h_y} - \frac{\alpha (T_E - T_W)}{h_x} \right] \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

A Eq. (8.22) representa um sistema de equações algébricas cuja matriz de coeficientes tem cinco diagonais não-nulas (pentadiagonal), e vale para os nós internos da malha, isto é:

$$\left. \begin{array}{l} i = 2, 3, \dots, N_x - 1 \quad (1 \text{ e } N_x \rightarrow \text{contornos}) \\ j = 2, 3, \dots, N_y - 1 \quad (1 \text{ e } N_y \rightarrow \text{contornos}) \end{array} \right\}$$

Como  $b_P^u$  (termo fonte para a variável  $u$ ) é função de  $v$ , temos não-linearidade no sistema.

De forma semelhante ao problema de difusão de calor unidimensional, a aplicação de condições de contorno de Dirichlet, resulta em

$$u_P = u_{c.c.}$$

ou seja

$$a_P^u = 1; \quad a_W^u = a_E^u = a_S^u = a_N^u = 0; \quad b_P^u = u_{c.c.} \quad (8.24)$$

onde  $u_{c.c.}$  representa os valores conhecidos de  $u$  em cada nó dos contornos, que envolve

$$\left. \begin{array}{l} i = 1 \text{ e } N_x \\ j = 1 \text{ e } N_y \end{array} \right\}$$

### 8.2.2 Forças na direção $y$

A solução numérica da Eq. (8.13) é abordada nesta seção. Tal equação pode ser reescrita como

$$\left(1 + C_\mu\right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_\mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2 C_\mu \alpha \frac{\partial T}{\partial y} \quad (8.25)$$

Para a derivada da temperatura, com diferença central, Eq. (2.26), obtém-se

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_P \approx \frac{T_N - T_S}{2 h_y} \quad (8.26)$$

onde os nós envolvidos na aproximação numérica da Eq. (8.25) no nó  $P$  são mostrados na Fig. (8.1). As duas primeiras derivadas de 2ª ordem da Eq. (8.25) são aproximadas usando-se diferença central (CDS-2), através da Eq. (2.38), resultando em:

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_P \approx \frac{v_W + v_E - 2v_P}{h_x^2} \quad (8.27)$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_P \approx \frac{v_S + v_N - 2v_P}{h_y^2} \quad (8.28)$$

A derivada cruzada de  $u$ , na Eq. (8.25), também é aproximada por diferença central:

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_P \approx \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_N - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_S}{2 h_y} \quad (8.29)$$

onde, novamente com diferença central, tem-se:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_N \approx \frac{u_{NE} - u_{NW}}{2 h_x} \quad (8.30)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_S \approx \frac{u_{SE} - u_{SW}}{2 h_x} \quad (8.31)$$

Assim, com as Eqs. (8.30) e (8.31) em (8.29), chega-se a:

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_P \approx \frac{u_{NE} + u_{SW} - u_{NW} - u_{SE}}{4 h_x h_y} \quad (8.32)$$





Finalmente, com as substituições das Eqs. (8.26), (8.27), (8.28) e (8.32) na Eq. (8.25), obtém-se:

$$a_P^v v_P = a_W^v v_W + a_E^v v_E + a_S^v v_S + a_N^v v_N + b_P^v \quad (8.33)$$

onde

$$\left. \begin{aligned} a_W^v &= a_E^v = \frac{1}{h_x^2} \\ a_S^v &= a_N^v = \frac{1 + C_\mu}{h_y^2} \\ a_P^v &= a_W^v + a_E^v + a_S^v + a_N^v \\ b_P^v &= C_\mu \left[ \frac{u_{NE} + u_{SW} - u_{NW} - u_{SE}}{4 h_x h_y} - \frac{\alpha (T_N - T_S)}{h_y} \right] \end{aligned} \right\} \quad (8.34)$$

Os comentários feitos na seção 8.2.1 para a Eq. (8.22) também se aplicam à Eq. (8.33).

Como  $b_P^v$  (termo fonte para a variável  $v$ ) é função de  $u$ , temos não-linearidade no sistema.

A aplicação de condições de contorno de Dirichlet é semelhante ao caso anterior, e resulta em

$$v_P = v_{c.c.}$$

ou seja

$$a_P^v = 1; \quad a_W^v = a_E^v = a_S^v = a_N^v = 0; \quad b_P^v = v_{c.c.} \quad (8.35)$$

onde  $v_{c.c.}$  representa os valores conhecidos de  $v$  em cada nó dos contornos.

### 8.2.3 Cálculo das deformações

As duas deformações normais ( $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$ ) e a cisalhante ( $\gamma_{xy}$ ), definidas nas Eqs. (8.3) a (8.5), podem ser obtidas calculando-se suas derivadas com diferença central. Isso resulta em

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_P \approx \frac{\phi_E - \phi_W}{2h_x} \quad (8.36)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_P \approx \frac{\phi_N - \phi_S}{2h_y} \quad (8.37)$$

onde  $\phi$  representa  $u$  e  $v$ . Estas aproximações numéricas são de 2ª ordem e valem para os nós internos da malha. Para manter a mesma ordem (2ª) nos contornos, deve-se usar as aproximações numéricas das nas Eqs. (2.29) e (2.32), aplicadas às direções  $x$  e  $y$ . Elas resultam em

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_P \approx \frac{4\phi_E - 3\phi_P - \phi_{EE}}{2h_x} \quad (\text{contorno esquerdo: DDS-2}) \quad (8.38)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_P \approx \frac{3\phi_P + \phi_{WW} - 4\phi_W}{2h_x} \quad (\text{contorno direito: UDS-2}) \quad (8.39)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_P \approx \frac{4\phi_N - 3\phi_P - \phi_{NN}}{2h_y} \quad (\text{contorno inferior: DDS-2}) \quad (8.40)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_P \approx \frac{3\phi_P + \phi_{SS} - 4\phi_S}{2h_y} \quad (\text{contorno superior: UDS-2}) \quad (8.41)$$

onde  $\phi$  representa  $u$  e  $v$ , e os nós envolvidos são mostrados na Fig. (8.2).

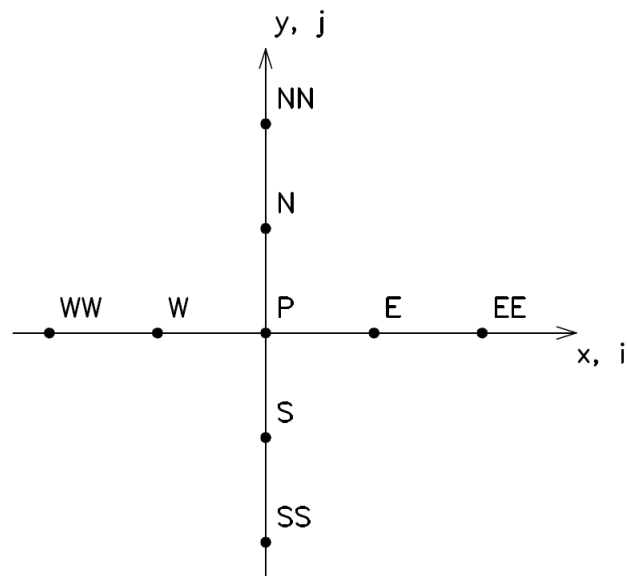


Figura 8.2. Nós envolvidos no cálculo das deformações.

#### 8.2.4 Cálculo das tensões

As duas tensões normais ( $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ ) e a cisalhante ( $\tau_{xy}$ ), definidas nas Eqs. (8.8) a (8.10), podem ser calculadas com as derivadas aproximadas nas Eqs. (8.36) a (8.41), como na seção anterior, e usando-se a temperatura ( $T$ ) de cada nó.

### 8.3 ALGORITMO GERAL

A solução numérica do problema termoelástico bidimensional pode ser obtida através do seguinte algoritmo:

- 1) Ler os dados do problema.
- 2) Discretizar o domínio de cálculo, isto é, obter  $h_x$  e  $h_y$ .
- 3) Calcular os coeficientes e termos fontes da temperatura ( $T$ ).
- 4) Resolver o sistema de equações da temperatura, com o método de Gauss-Seidel, até satisfazer o critério de convergência especificado para  $T$ .
- 5) Calcular os coeficientes do deslocamento  $u$  com as Eqs. (8.23) e (8.24).

- 6) Calcular os coeficientes do deslocamento  $v$  com as Eqs. (8.34) e (8.35).
- 7) Estimar a solução (inicial) de  $v$ .
- 8) Calcular os termos fontes de  $u$  com a Eq. (8.23).
- 9) Aplicar o método de Gauss-Seidel para resolver a Eq. (8.22) de  $u$  (5 a 10 iterações).
- 10) Calcular os termos fontes de  $v$  com a Eq. (8.34).
- 11) Aplicar o método de Gauss-Seidel para resolver a Eq. (8.33) de  $v$  (5 a 10 iterações).
- 12) Retornar ao item 8 enquanto não for satisfeito algum critério de convergência sobre as soluções de  $u$  e  $v$ .
- 13) Calcular as deformações conforme a seção 8.2.3.
- 14) Calcular as tensões conforme a seção 8.2.4.
- 15) Gravar os resultados de interesse.
- 16) Visualizar os campos de  $T$ ,  $u$ ,  $v$ , deformações e tensões.

## 8.4 EXERCÍCIO

### **Trabalho computacional do Capítulo 8**

Ver anexo – página seguinte.