

*Capítulo 9.*

---

**DIFUSÃO DE CALOR 1D TRANSIENTE**

---

Este capítulo envolve:

- Temperatura é função do espaço e do tempo:  $T(x, t)$
- Condições de contorno de Dirichlet
- Condições iniciais, para o tempo
- Coordenadas cartesianas
- Propriedades constantes (condutividade térmica  $k$ , massa específica  $\rho$ , calor específico  $c$ , taxa de geração de calor  $\dot{q}$ , difusividade térmica  $\alpha$ )
- Malhas uniformes no espaço e no tempo ( $\Delta x, \Delta t$ )
- Formulações implícita e explícita no tempo
- Conceitos de consistência, estabilidade e convergência

Em termos numéricos, a novidade deste capítulo é a solução de problemas transientes, ou seja, quando a incógnita também é função do tempo.

### 9.1 O MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático da condução de calor 1D transiente em uma parede plana (Fig. 3.1), é dado por (Incropera e DeWitt, 1998).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (9.1)$$

onde

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} = \text{difusividade térmica}$$

$k$  = condutividade térmica

$\rho$  = massa específica

$c$  = calor específico

As variáveis de interesse são:

- A temperatura,  $T(x,t)$ , extraída da Eq. (9.1)
- A temperatura média, em  $x$  no tempo  $t$ , definida por

$$T_m(t) = \frac{1}{L} \int_0^L T(x,t) dx \quad (9.2)$$

onde  $L$  é o comprimento do domínio de cálculo.

## 9.2 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Em capítulos anteriores, foram feitas expansões da série de Taylor, ao longo do espaço, na direção  $x$ . Assim, com as expansões para os nós  $W$  e  $E$ , vizinhos de  $P$ , chegou-se a uma aproximação numérica para a derivada de 2ª ordem em  $x$  (CDS).

A série de Taylor também pode ser expandida, em torno do instante de tempo  $t$  e do nó  $P$ , ao longo do tempo.

$$T_P^t = T_P^{t_0} + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_P^t (t-t_0) + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_P^t \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}\right)_P^t \frac{(t-t_0)^3}{3!} + \dots$$

$$T_P^{t+\Delta t} = T_P^t + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_P^t \Delta t + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_P^t \frac{\Delta t^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}\right)_P^t \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots$$

$$T_P^{t-\Delta t} = T_P^t - \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_P^t \Delta t + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_P^t \frac{\Delta t^2}{2!} - \left(\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}\right)_P^t \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots \quad (9.3)$$

onde o superescrito “ $t - \Delta t$ ” representa o instante de tempo anterior. O passo de tempo  $\Delta t$  é equivalente a  $h$  ou  $\Delta x$ , e é calculado por

$$\Delta t = \frac{t_F}{M} = \text{passo de tempo} \quad (9.4)$$

onde

$t_F$  = tempo final

$M$  = número de avanços no tempo

Assim, a partir da Eq. (9.3), pode-se obter

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_P^t = \underbrace{\frac{(T_P^t - T_P^{t-\Delta t})}{\Delta t}}_{\text{considerado}} + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_P^t \frac{\Delta t}{2} - \left(\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}\right)_P^t \frac{\Delta t^2}{6} + \dots}_{\text{desprezado (erro de truncamento)} \rightarrow \text{ordem de } \Delta t} \quad (9.5)$$

portanto,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_P^t \approx \frac{(T_P^t - T_P^{t-\Delta t})}{\Delta t} \quad (9.6)$$

Da Eq. (9.5), pode-se ver que  $p_V = 1, 2, 3, \dots$ , e  $p_L = 1$ , para o erro de truncamento da aproximação numérica da Eq. (9.6).

Com a substituição das Eqs. (2.38) e (9.6) na Eq. (9.1), chega-se a

$$\frac{T_P^t - T_P^0}{\Delta t} = \frac{T_W^0 + T_E^0 - 2T_P^0}{\Delta x^2} \alpha \quad (9.7)$$

onde  $T_P^0 = T_P^{t-\Delta t}$  e  $\theta$  indica um instante de tempo genérico no qual a derivada espacial de 2ª ordem é avaliada, e que dá origem às diversas formulações numéricas existentes na literatura (Tannehill *et al.*, 1997; Maliska, 2004; Ferziger e Peric, 2001). A relação entre  $\theta$  e  $T$  (Fig. 9.1) é dada por:

$$T_P^0 = T_P^0 + \theta (T_P^t - T_P^0) \quad (9.8)$$

onde  $0 \leq \theta \leq 1$ .

Em função do valor de  $\theta$ , pode-se ter as seguintes formulações:

$$\theta = 0 \quad : \quad \text{formulação explícita} \quad \rightarrow \quad T_P^\theta = T_P^0 = T_P^{t-\Delta t}$$

$$\theta = 1/2 \quad : \quad \text{formulação de Crank-Nicolson} \quad \rightarrow \quad T_P^\theta = \frac{1}{2}(T_P^0 + T_P^t)$$

$$\theta = 1 \quad : \quad \text{formulação totalmente implícita} \quad \rightarrow \quad T_P^\theta = T_P^t$$

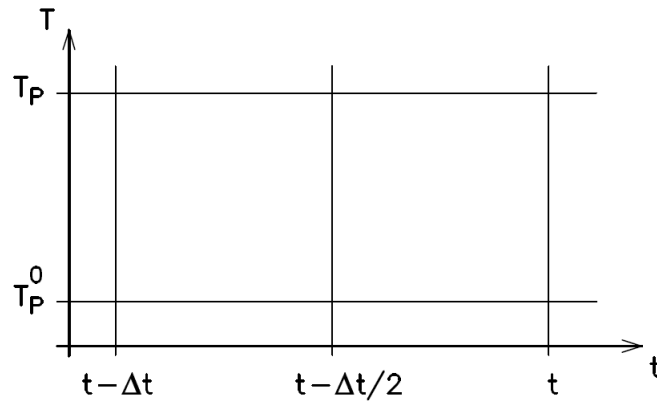


Figura 9.1. Formulações no tempo.

### 9.2.1 Formulação explícita ( $\theta = 0$ )

No caso de se usar  $\theta = 0$ , a Eq. (9.7) resulta em:

$$\frac{T_P^t - T_P^0}{\Delta t} = \frac{T_W^0 + T_E^0 - 2T_P^0}{\Delta x^2} \alpha \quad (9.10)$$

e chamando-se

$$\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \quad (9.10a)$$

pode-se reescrever a Eq. (9.10) na forma

$$T_P^t = \lambda T_W^0 + \lambda T_E^0 + (1 - 2\lambda) T_P^0 \quad (9.11)$$

A Eq. (9.11) representa a formulação explícita. Este nome é empregado porque a temperatura em cada nó  $P$  da malha, no instante  $t$  ( $T_P^t$ ), é calculada com temperaturas conhecidas do instante anterior, isto é, em  $(t - \Delta t)$ . A Fig. 9.2, abaixo, representa os nós que influenciam diretamente a solução de  $T_P^t$ , indicados por círculos e setas.

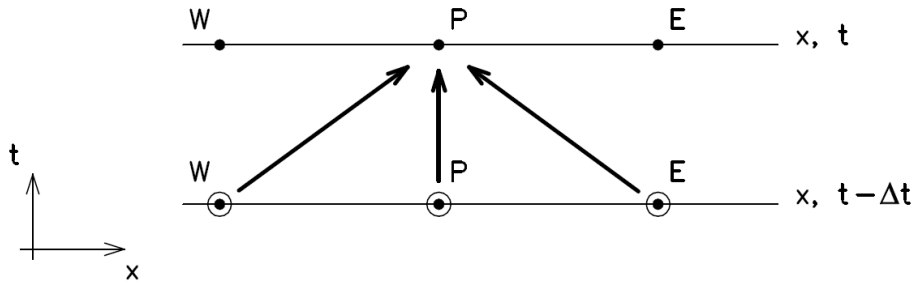


Figura 9.2. Formulação explícita no tempo ( $\theta = 0$ ).

Se a Eq. (9.11) for comparada a

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + b_P \tag{9.12}$$

obtem-se

$$\left. \begin{aligned} a_P &= 1, & a_W &= a_E = 0 \\ b_P &= \lambda T_W^0 + \lambda T_E^0 + (1 - 2\lambda) T_P^0 \end{aligned} \right\} \tag{9.13}$$

Assim, a vantagem de se utilizar a formulação explícita é o fato da solução do sistema de equações algébricas, representado pela Eq. (9.12), ser direta até mesmo com o método de Gauss-Seidel. A desvantagem é que existe um limite que deve ser satisfeito para o avanço não divergir. Este limite é dado por

$$1 - 2\lambda \geq 0 \quad \leftarrow \text{Condição de estabilidade}$$

ou seja

$$1 - 2 \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \geq 0 \quad \therefore \quad \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (9.14)$$

Esse limite significa que o coeficiente de  $T_P^0$  na Eq. (9.11) ou (9.13) tem que ser sempre positivo para a solução numérica ser estável no tempo.

Observação: A formulação explícita tem ordem de  $\Delta t$ ,  $O(\Delta t)$ , ou seja, 1ª ordem, e é condicionalmente estável.

### 9.2.2 Formulação totalmente implícita ( $\theta = 1$ )

No caso de se usar  $\theta = 1$ , a Eq. (9.7) resulta em:

$$\frac{T_P^t - T_P^0}{\Delta t} = \frac{T_W^t + T_E^t - 2T_P^t}{\Delta x^2} \alpha \quad (9.15)$$

e lembrando-se que  $\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$ , pode-se reescrever a Eq. (9.15) na forma

$$(1 + 2\lambda)T_P^t = \lambda T_W^t + \lambda T_E^t + T_P^0 \quad (9.16)$$

Comparando-se a Eq. (9.16) com a (9.12), obtém-se

$$a_P = 1 + 2\lambda; \quad a_W = a_E = \lambda; \quad b_P = T_P^0 \quad (9.17)$$

No caso desta formulação, devido à diagonal dominância, a solução é incondicionalmente estável no tempo. Isto é, não existe limite como aquele da Eq. (9.14) da formulação explícita. Porém, o sistema de equações, Eq. (9.16), precisa ser resolvido com o método TDMA para ser direto. Além disso, o TDMA tem que ser empregado a cada avanço no tempo.

A Fig. 9.3, abaixo, representa os nós que influenciam diretamente a solução de  $T_P^t$ , indicados por círculos e setas.

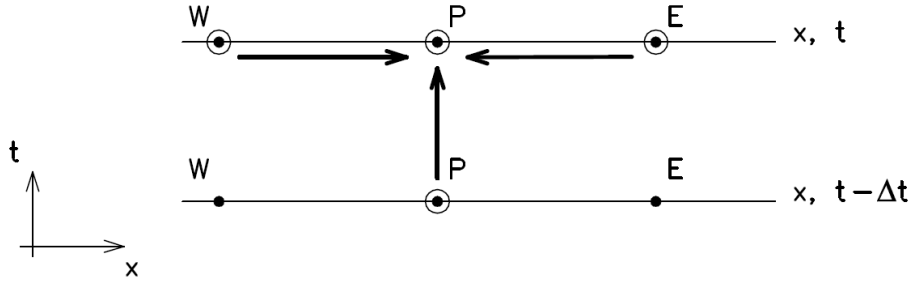


Figura 9.3. Formulação totalmente implícita ( $\theta = 1$ ).

Observação: A formulação totalmente implícita tem ordem de  $\Delta t$ ,  $O(\Delta t)$ , ou seja, 1ª ordem, e é incondicionalmente estável.

### 9.2.3 Formulação de Crank-Nicolson ( $\theta = 1/2$ )

Conforme a Eq. (2.39), o erro de truncamento da aproximação numérica da derivada de 2ª ordem no espaço, Eq. (9.1), é de 2ª ordem, isto é,  $p_L = 2$ . Mas, conforme a Eq. (9.5), a aproximação numérica da derivada temporal usada até agora, apresenta erro de truncamento de 1ª ordem, ou seja,  $p_L = 1$ . Portanto, a ordem assintótica do erro de truncamento de  $T$  é igual à unidade, tanto no caso da formulação explícita, Eq. (9.10), quanto da formulação totalmente implícita, Eq. (9.15).

Uma forma de se obter  $p_L = 2$  é usar a formulação de Crank-Nicolson (Tannehill *et al.*, 1997). Esta formulação consiste na média aritmética das formulações explícita e totalmente implícita, ou seja,  $\theta = 1/2$ , o que resulta em:

$$\frac{T_P^t - T_P^0}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} \left[ \frac{(T_W^0 + T_E^0 - 2T_P^0) + (T_W^t + T_E^t - 2T_P^t)}{2} \right]$$

$$\frac{T_P^t - T_P^0}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2 \Delta x^2} \left[ T_W^0 + T_W^t + T_E^0 + T_E^t - 2(T_P^0 + T_P^t) \right] \tag{9.18}$$

e lembrando-se que  $\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$ , pode-se reescrever a Eq. (9.18) na forma

$$(1 + \lambda)T_P^t = \left(\frac{\lambda}{2}\right)T_W^t + \left(\frac{\lambda}{2}\right)T_E^t + \left[\left(\frac{\lambda}{2}\right)(T_W^0 + T_E^0) + (1 - \lambda)T_P^0\right] \quad (9.19)$$

Se a Eq. (9.19) for comparada à Eq. (9.12), obtém-se

$$\left. \begin{aligned} a_P &= 1 + \lambda, & a_W &= a_E = \frac{\lambda}{2} \\ b_P &= \left(\frac{\lambda}{2}\right)(T_W^0 + T_E^0) + (1 - \lambda)T_P^0 \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

podendo-se notar a diagonal dominância também neste caso.

Na Fig. 9.4, abaixo, são representados os nós que influenciam diretamente a solução de  $T_P^t$ , indicados por círculos e setas.

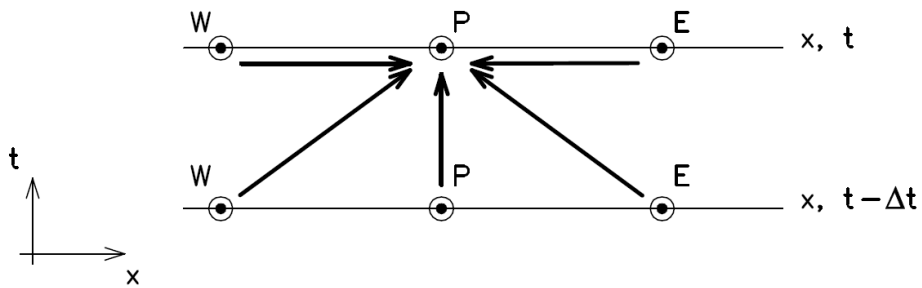


Figura 9.4. Formulação de Crank-Nicolson ( $\theta = 1/2$ ).

Observação: A formulação de Crank-Nicolson tem ordem de  $\Delta t^2$ ,  $O(\Delta t^2)$ , ou seja, 2ª ordem, e é incondicionalmente estável.

### 9.3 SOLUÇÃO ANALÍTICA E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Equação diferencial:  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  (9.1)-repetida

Condições de contorno (C.C.):  $T(0, t) = T(L, t) = 0$  (9.21)



Condição inicial (C.I.), isto é, o campo de temperaturas no início dos cálculos, em  $t = 0$ , é dado por:

$$T(x,0) = T_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (9.22)$$

A solução analítica das Eqs. (9.1), (9.21) e (9.22) resulta em:

$$T(x,t) = T_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) e^{-\frac{\alpha\pi^2 t}{L^2}} \quad (9.23)$$

$$T_m(t) = \frac{2}{\pi} T_0 e^{-\frac{\alpha\pi^2 t}{L^2}} \quad (9.24)$$

#### 9.4 ALGORITMO

A solução numérica pode ser obtida através do seguinte algoritmo:

- 1) Ler os dados do problema:  $T(0,t)$ ,  $T(L,t)$ ,  $T_P(x,0)$ ,  $\alpha$ ,  $L$ ,  $\theta$ ,  $t_F$ ,  $N$ ,  $M$
- 2) Discretizar o domínio de cálculo, isto é, obter

$$\Delta x = \frac{L}{N-1} \quad \text{e} \quad \Delta t = \frac{t_F}{M}$$

- 3) Calcular os coeficientes.
- 4) Fazer  $t = 0$  e  $T_P^0 = T_P(x,0)$ .
- 5) Fazer  $t = t + \Delta t$ .
- 6) Calcular os termos fontes.
- 7) Resolver o sistema de equações, obtendo  $T_P(x,t)$ .
- 8) Calcular  $T_m(t)$ .
- 9) Fazer  $T_P^0 = T_P$ .
- 10) Voltar ao item 5, até atingir  $t = t_F$ .
- 11) Imprimir e visualizar  $T(x,t_F)$  e  $T_m(t_F)$ .

## 9.5 SOLUÇÃO NUMÉRICA CONVERGENTE

Consistência: Um modelo numérico é consistente se a equação discretizada tende à equação diferencial quando  $\Delta x \rightarrow 0$  e  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Por exemplo, da Eq. (9.15),

$$\underbrace{\frac{T_P^t - T_P^0}{\Delta t} = \frac{T_W^t + T_E^t - 2T_P^t}{\Delta x^2} \alpha}_{\text{Modelo numérico consistente}} \rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (9.25)$$

Estabilidade: Um modelo numérico é estável se o erro numérico ( $E$ ) tende a um valor finito ( $\delta$ ) quando o número de iterações ( $n$ ) tende ao infinito ( $\infty$ ), ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |E(T_P)| = \delta_P \quad \text{para } \Delta x \text{ e } \Delta t \text{ fixos} \quad (9.26)$$

Por exemplo, para as discretizações vistas neste capítulo:

- A solução numérica é incondicionalmente estável se

$$\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1 \quad (9.27)$$

- A solução numérica é condicionalmente estável se

$$0 \leq \theta \leq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2 - 4\theta} \quad (9.28)$$

Nos capítulos 8 a 10 de Hirsch (1988) são apresentados alguns métodos para análise de estabilidade. Eles são usados para verificar se a solução numérica converge para a solução exata do sistema de equações, ou diverge.

Convergência: Uma solução numérica é convergente quando o modelo numérico é consistente e estável, isto é,

$$\lim_{\substack{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} |E(T_P)| = 0 \quad (9.29)$$

ou seja, a solução numérica convergente tende à solução exata da equação diferencial quando  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$  e  $n \rightarrow \infty$ .

## 9.6 EXERCÍCIO

Implemente um programa computacional para resolver o problema definido pelas Eqs. (9.1), (9.21) e (9.22), da condução de calor 1D transiente.

Dados:  $L = 1$  m  $T_0 = 1$   
 $N = 17$  nós Solver: TDMA  
 $\alpha = 1$  m<sup>2</sup>/s  $M = 40$  avanços no tempo  
 $t_F = 0,1$  s  $\theta = 1/2$  (Crank Nicolson)

Resultados a apresentar:

- 1) Um gráfico de  $T$  versus  $x$ , em  $t_F$ , com as soluções analítica e numérica.
- 2) Um gráfico de  $T_m$  versus  $t$ , com as soluções analítica e numérica.
- 3) O valor de  $T_m(t_F)$ , das soluções analítica e numérica.
- 4) Estimativa do erro de discretização de  $T_m(t_F)$ , conforme o procedimento da seção 4.1.8.