09/06/2017

Modelo matemático para uma motocicleta

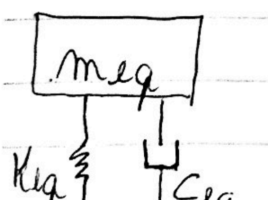
Problema Proposto: analisar a vibração na direcção vertical, de um sistema físico substituído por uma motocicleta e o seu condutor. Na motocicleta são conhecidos os valores das constantes de mola (rigidezes) dos pneus (K_p), das constantes de mola e de amortecimento dos amortecedores dianteiro e traseiro (K_a e C_a), da massa das rodas (m_r) e das demais partes (m_m).

No motociclista são conhecidos os valores da massa (m_c), rigidez (K_c) e amortecimento (C_c).

Apresentar três modelos matemáticos, partindo do mais simples ao mais complexo.

Solução:

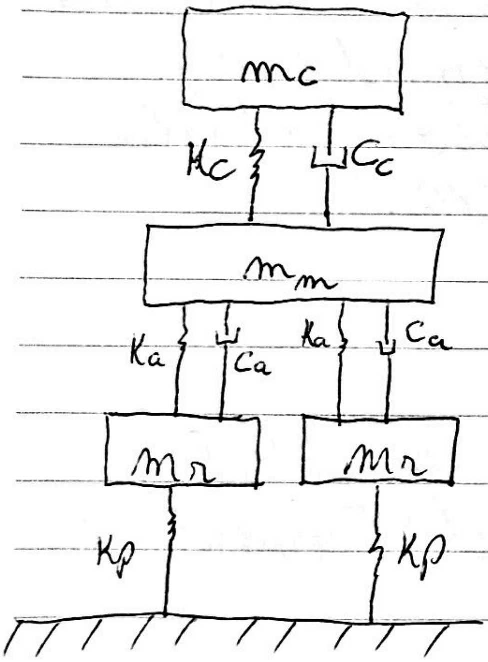
1º modelo – são utilizados valores equivalentes para as constantes de mola, de amortecimento e para as massas.



Em meq estão incluídas todas as massas, em Keq, todas as rigidezes e, em Ceq, todas as constantes de amortecimento.

2º modelo – adotou-se um valor equivalente para a massa do motociclista e da motocicleta (sem a massa das rodas)

3º modelo - todas as grandezas foram consideradas



Obtenção da Equação da Onda

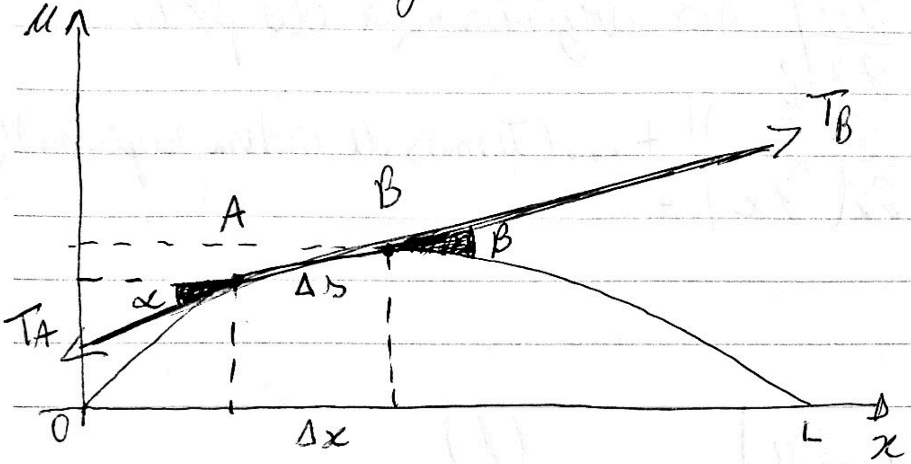
Seja um fio perfeitamente flexível, de densidade uniforme, estendido (alongado) a uma tensão uniforme T entre os pontos $x=0$ e $x=L$.

Hipóteses adotadas:

1) O fio não oferece resistência ao se curvar
↳ (consequência) tensão tangencial ao fio em cada ponto.

2) Ocorrem somente pequenos deslocamentos transversais

3) As forças gravitacionais são desprezadas.



Para o segmento AB, de comprimento Δs, pode-se escrever:

- Equilíbrio na direção horizontal

$$T_A \cos(\alpha) = T_B \cos(\beta) = T \text{ (constante)} \qquad (a)$$

- Equilíbrio na direção vertical

→ densidade uniforme

$$\rho \Delta s \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_B \sin(\beta) - T_A \sin(\alpha) \qquad (b)$$

Empregando (a) em (b)

$$\frac{\rho \Delta s}{T} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T_B \sin(\beta)}{T_B \cos(\beta)} - \frac{T_A \sin(\alpha)}{T_A \cos(\alpha)}$$

$$\frac{\rho \Delta s}{T} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = tg(\beta) - tg(\alpha) \qquad (c)$$

Como: $tg(\beta) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_B$ e $tg(\alpha) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A$ (d)

Pode-se expandir $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_B$ na vizinhança do ponto A:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_B = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A + \Delta x \left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_A + \ldots \text{(termos de ordem superior)} \quad (e)$$

Consequentemente,

$$tg(\beta) - tg(\alpha) = \Delta x \cdot \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_A \qquad (f)$$

Como os deslocamentos transversais são pequenos, $\Delta s = \Delta x$. Substituindo (f) em (c) e tomando o limite quando $\Delta x \to 0$, obtém-se:

$$* \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \text{ com } c^2 = \frac{T}{\rho}$$

$$\hookrightarrow \nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Resolução da Equação

1) Solução Analítica: método da separação das variáveis: $u(x,t) = V(x) \cdot T(t)$

Referências:
a) G. STEPHENSON, Uma introdução às Equações diferenciais para estudantes de Ciências, editora: Edgard Blücher 1975.
b) E. Kreyszig, Advanced Engineering mathematics, John Wiley & Sons, Inc., 1999.

2) Métodos Numéricos

I - Método das Diferenças Finitas

• Ref - G. D. Smith, Numerical solution of Partial Differential Equations, Finite Difference Methods, Clarendon Press, Oxford, 1985.

II - Método dos Elementos Finitos

• Ref - O. C. Zienkiewicz and K. Morgan, Finite Elements and Approximation, Wiley, 1983.

K. J. Bathe, Finite Element Procedures, Prentice-Hall, 1996.

III - Método dos Elementos de Contorno

• Ref - C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, L. C. Wrobel, Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, 1984.