14 06 2017

Método Das Diferenças Finitas

No método das diferenças finitas (MDF) o domínio do problema, contínuo, é substituído por uma série de pontos discretos, ou nós, nos quais são calculadas as incógnitas do problema. Essa substituição do contínuo pelo discreto denomina-se discretização.

Uma vez efetuada a discretização do domínio do problema, aplica-se o MDF para a determinação das incógnitas: as derivadas parciais presentes na equação diferencial (ou sistema de equações) são substituídas (ou aproximadas) por fórmulas discretas de diferenças. A aplicação dessas fórmulas aos pontos do domínio discretizado gera um sistema de equações algébricas com estrutura em banda, cuja solução fornece os valores das incógnitas do problema nesses pontos discretos.

- Derivadas de Primeira ordem

Por definição, a derivada de uma função $u(x)$ em um ponto $x = x_i$ é calculada como:

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i)}{\Delta x} \qquad (1)$$

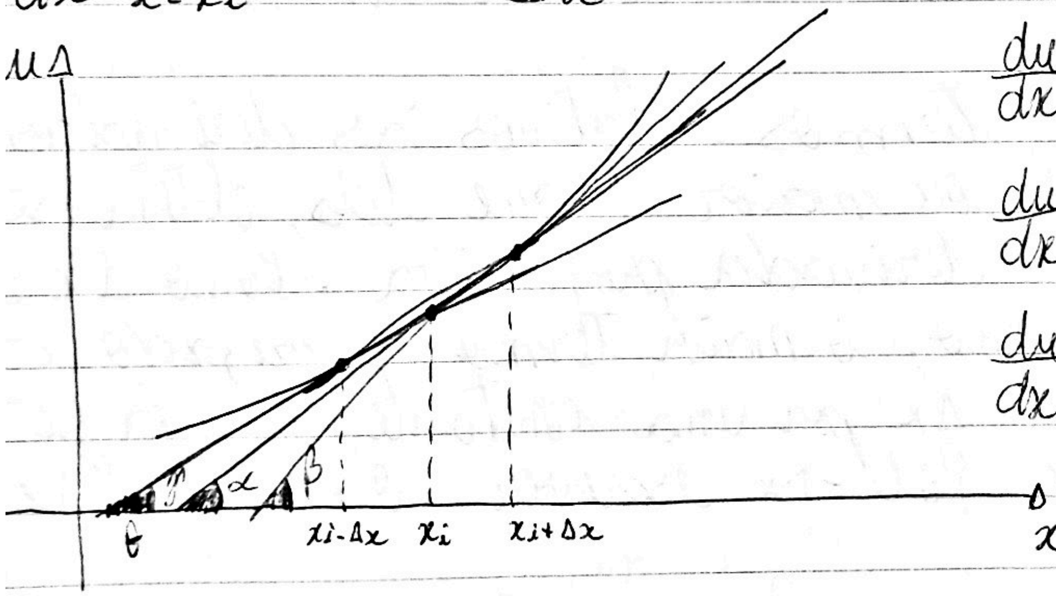
De forma aproximada, utilizando um incremento (Δx) pequeno, porém finito, pode-se escrever:

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_i} \cong \frac{u(x_i+\Delta x) - u(x_i)}{\Delta x} \qquad (2)$$

A aproximação definida pela equação (2) é denominada <u>Diferença Progressiva</u>, porque utiliza o ponto $(x_i+\Delta x)$.

De maneira análoga, pode-se definir uma <u>Diferença Regressiva</u> como:

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_i} \cong \frac{u(x_i) - u(x_i-\Delta x)}{\Delta x} \qquad (3)$$



$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i} = tg(\alpha)$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i}^{DR} = tg(\gamma)$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i}^{DP} = tg(\beta)$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i}^{DC} = tg(\theta)$$

Outra aproximação é a <u>Diferença Central</u>, dada por:

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_i} \cong \frac{u(x_i+\Delta x) - u(x_i-\Delta x)}{2\Delta x} \qquad (4)$$

As fórmulas aproximadas (2), (3) e (4) podem ser obtidas através de séries de Taylor, o que permite estimar o erro cometido em cada tipo de aproximação.

A expansão em série de Taylor do valor de u em $x=x_i+\Delta x$, em torno do valor de u em $x=x_i$, é dada por:

$$u(x_i+\Delta x) = u(x_i) + \Delta x \left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x_i} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{d^3u}{dx^3} + \dots \quad (5)$$

A expressão (5) pode ser reescrita como:

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i} = \frac{u(x_i+\Delta x) - u(x_i)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2}\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x_i} - \frac{(\Delta x)^2}{6}\left.\frac{d^3u}{dx^3}\right|_{x_i} - \dots \quad (6)$$

Desprezando os termos relativos às derivadas de ordem igual ou maior do que dois, obtém-se a expressão da derivada progressiva. Como Δx é um valor pequeno, o maior termo desprezado é igual ao produto Δx por uma constante, ou seja, é da ordem de Δx. Pode-se escrever: o erro é $O(\Delta x)$.

Analogamente, a expansão em série de Taylor do valor de u em $x = x_i - \Delta x$, em torno do valor de u em $x = x_i$, é dada por:

$$u(x_i-\Delta x) = u(x_i) - \Delta x \left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x_i} - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\left.\frac{d^3u}{dx^3}\right|_{x_i} + \dots \quad (7)$$

Resolvendo para $\left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i}$:

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_i} = \frac{u(x_i) - u(x_i-\Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2}\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x_i} - \frac{(\Delta x)^2}{6}\left.\frac{d^3u}{dx}\right|_{x_i} + \dots \quad (8)$$

Ao se desprezar os termos relativos às derivadas de ordem igual ou maior que dois, obtém-se a expressão da Diferença Regressiva, que também introduz um erro $O(\Delta x)$ quando aproxima (1).

Subtraindo (7) de (5):

$$u(x_i+\Delta x) - u(x_i-\Delta x) = 2\Delta x \left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i} + 2\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{d^3u}{dx^3} + \ldots \quad (9)$$

Resolvendo para $\left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i}$:

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_i} = \frac{u(x_i+\Delta x) - u(x_i-\Delta x)}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{3}\cdot\left.\frac{d^3u}{dx^3}\right|_{x_i} - \ldots \quad (10)$$

Para se obter a expressão correspondente à derivada central são desprezados os termos relativos às derivadas de ordem três ou superiores; consequentemente, o erro cometido quando se substitui (1) por (4) é $O(\Delta x^2)$.

• Derivada de Segunda Ordem.

As derivadas de ordem superior também podem ser aproximadas por fórmulas de diferenças, que podem ser obtidas através de séries de Taylor ou do emprego repetido das aproximações (2) e (3).

Para a obtenção de uma aproximação à derivada de segunda ordem, as expressões (5) e (7) podem ser somadas, resultando em:

$$u(x_i+\Delta x)+u(x_i-\Delta x)=2u(x_i)+(\Delta x)^2\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x_i}+2\frac{(\Delta x)^4}{4!}\left.\frac{d^4u}{dx^4}\right|_{x_i}+\ldots \quad (11)$$

Resolvendo para $\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x_i}$:

$$\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x=x_i}=\frac{u(x_i+\Delta x)-2u(x_i)+u(x_i-\Delta x)}{(\Delta x)^2}-\frac{(\Delta x)^2}{12}\left.\frac{d^4u}{dx^4}\right|_{x_i}-\ldots \quad (12)$$

A aproximação para a derivada de segunda ordem é do tipo Diferença Central e o erro cometido é $O(\Delta x)^2$.

Quando se faz,

$$\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x_i}=\frac{u(x_i+\Delta x)-2u(x_i)+u(x_i-\Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (13)$$

Aplicações

1) Seja a equação $\frac{d^2u}{dx^2}+u+x=0$, em $0\leq x\leq 1$, com condições de contorno: $u(0)=0$ e $u(1)=1$.

Resolver com o MDF adotando $\Delta x=0.2$, isto é, dividindo o domínio do problema em cinco subdomínios.

Solução: a equação diferencial, inicialmente, é reescrita de forma discreta:

$$\frac{u(x_i+\Delta x)-2u(x_i)+u(x_i-\Delta x)}{(\Delta x)^2}+u(x_i)+x_i=0$$

Agrupando os termos semelhantes:

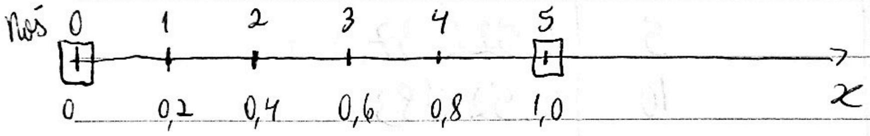
$$u(x_i+\Delta x) + (2+\Delta x)^2 u(x_i) + u(x_i-\Delta x) = -(\Delta x)^2 x_i \quad (*)$$

De forma simplificada, a equação (*) pode ser reescrita como:

$$u_{i+1} + (\Delta x^2 - 2) u_i + u_{i-1} = -\Delta x^2 . x_i \quad (**)$$

onde,

$$u_{i+1} = u(x_i+\Delta x) = u(x_{i+1})$$
$$u_i = u(x_i)$$
$$u_{i-1} = u(x_i-\Delta x) = u(x_{i-1})$$



Como $\Delta x = 0,2$ e como $u(0)=0$ e $u(1)=1$, os pontos onde a equação aproximada (**) deve ser aplicada são os pontos 1, 2, 3 e 4 que correspondem a $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ e $x_4 = 0.8$.

Assim a equação (**), $i = 1, 2, 3, 4$.

$$u_1 + \alpha u_0 + u_{-1} = -dx^2 x_0 \quad u(0) = 0$$
$$u_2 + \alpha u_1 + u_0 = -dx^2 x_1$$
$$u_3 + \alpha u_2 + u_1 = -dx^2 x_2$$
$$u_4 + \alpha u_3 + u_2 = -dx^2 x_3$$
$$u_5 + \alpha u_4 + u_3 = -dx^2 x_4$$
$$u_6 + \alpha u_5 + u_4 = -dx^2 x_5 \rightarrow u(1) = 1$$

21/06/2017

Em forma matricial, após a imposição das condições de contorno:

$$\begin{bmatrix} -1.96 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1.96 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1.96 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.008 \\ -0.0160 \\ -0.0240 \\ -1.0320 \end{bmatrix}$$

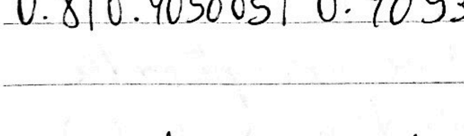
As soluções aproximadas são obtidas após a solução do sistema de equações e podem ser comparadas com a solução analítica, dada por:

$$u(x) = 2\frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(1)} - x$$

x	Analítica	MDF
0.2	0.272195	0.272468
0.4	0.525566	0.526037
0.6	0.742037	0.742365
0.8	0.905005	0.905390

N	$u(0.4)$
5	0.526037
10	0.525683
20	0.525595
40	0.525573
80	0.525568

2) Resolver o problema anterior, com mesma discretização, com condição de contorno natural $\frac{du}{dx} = 1$ em $x = 1$.



O problema agora possui cinco incógnitas, uma vez que o valor de $u(1) = u_5$ não é conhecido.

Assim, é necessário gerar mais uma equação, além das aplicadas nos quatro pontos interiores, para a solução do problema.

Há duas alternativas para obter a equação adicional

1ª) Aproximar a condição de contorno natural utilizando diferença regressiva.

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = \frac{u(1) - u(0.8)}{0.2} = \frac{u_5 - u_4}{0.2} = 1$$

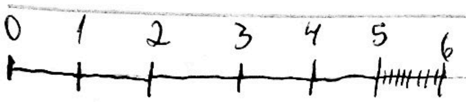
$$\Rightarrow \boxed{u_5 = 0.2 + u_4}$$

substituindo a equação anterior na quarta equação do exemplo 1, para $i=4$, obtém-se:

$$-0.96u_4 + u_3 = -0.232$$

$$\begin{bmatrix} -1.96 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1.96 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1.96 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.008 \\ -0.016 \\ -0.024 \\ -0.232 \end{bmatrix} \quad (SI)$$

2ª) Consiste em aplicar a equação (**) no ponto $x=1$, o que gera a quinta equação requerida para a solução do sistema, mas envolve o valor de u em ponto fictício (fantasma) fora do domínio, o ponto $x=1.2$. A relação entre o valor fictício $u(1.2)=u_6$ e algum outro valor do domínio ~~consiste~~ constitui uma sexta equação e pode ser obtida aproximando a condição de contorno com diferença central.



Para $i=5$:

$$\boxed{U_6} - 1.96U_5 + U_4 = -(0.2)^2 \cdot (1) = -0.04$$

Além disso:

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = \frac{u(1.2)-u(0.8)}{0.4} \Rightarrow \frac{U_6 - U_4}{0.4} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{U_6 = 0.4 + U_4}$$

O novo sistema de equações é:

$$\begin{bmatrix} -1.96 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1.96 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.96 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.96 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.008 \\ -0.016 \\ -0.024 \\ -0.032 \\ -0.44 \end{bmatrix} \quad (S\text{II})$$

As soluções aproximadas, obtidas após a solução dos sistemas de equações (SI) e (SII) podem ser comparadas com a solução analítica:

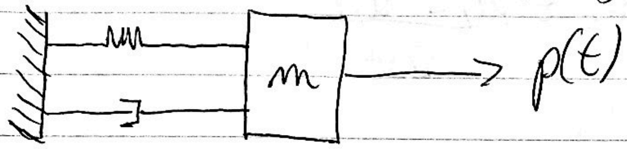
$$u(x) = 2\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(1)} - x.$$

x	analítica	SI	SII
0.2	0.535401	0.441484	0.542263
0.4	1.041483	0.857308	1.054835
0.6	1.490098	1.222840	1.509214
0.8	1.855388	1.515458	1.879224
1.0	2.114815	1.715458	2.142065

3) Sistema massa-mola-amortecedor sujeito à ação de uma força dependente do tempo. O problema é descrito pela equação:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ku = p(t),$$

onde m é a massa, c é o coeficiente de amortecimento e K é a rigidez da mola.



As condições iniciais do problema são $u(0) = u_0$ e $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$. Para resolver o problema numericamente, são feitas as substituições:

$$\ddot{u}_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\Delta t)^2} \quad e \quad \dot{u}_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta t}$$

Nas aproximações, o índice j se refere ao tempo $t_j = j\Delta t$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ E Δt é o passo, ou incremento, de tempo.

A versão discretizada da equação diferencial, após a substituição das derivadas pelas aproximações é:

$$\left(\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t}\right) u_{j+1} = p_j^*, \text{ com}$$

$$p_j^* = \underbrace{p_j}_{\to p(t_j)} - \left(K - \frac{2m}{(\Delta t)^2}\right) u_j - \left(\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t}\right) u_{j-1}$$

23/06/2017

Para $j = 0, 1, 2, \ldots$ os valores de u_{j+1} são obtidos, sucessivamente, a partir dos valores já conhecidos, p_j, u_j e u_{j-1}.

Para se iniciar o processo de marcha no tempo ($j = 0$) é necessário determinar u_{-1}; das fórmulas de aproximação, pode-se escrever

$$\ddot{u}_0 = \frac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{(\Delta t)^2} \quad \text{e,} \quad \dot{u}_0 = \frac{u_1 - u_{-1}}{2\Delta t}$$

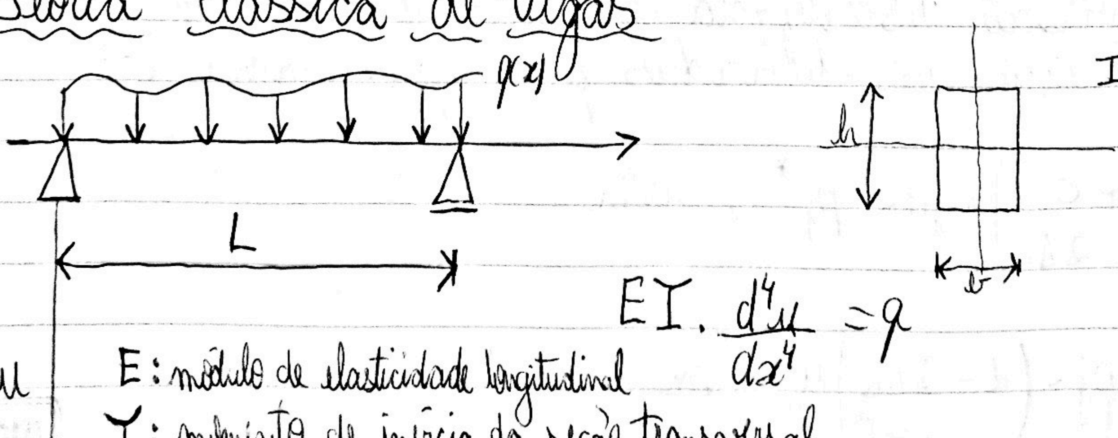
Resolvendo para u_{-1}:

$$u_{-1} = u_0 - \dot{u}_0 \Delta t + \frac{1}{2}\ddot{u}_0 (\Delta t)^2$$

Os valores de u_0 e $\dot{u}_0$ são conhecidos (condições iniciais); o valor de $\ddot{u}_0$ é determinado a partir da própria equação diferencial:

$$\ddot{u}_0 = \frac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m}$$

Teoria Clássica de Vigas



$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$EI \cdot \frac{d^4u}{dx^4} = q$$

E: módulo de elasticidade longitudinal

I: momento de inércia da seção transversal

$$\bullet\ \frac{d^4u}{dx^4} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = \frac{\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x+\Delta x} - 2\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x} + \left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x-\Delta x}}{(\Delta x)^2}$$

$$= \left\{ \frac{u(x+2\Delta x) - 2u(x+\Delta x) + u(x+\Delta x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} - \right.$$

$$- \frac{2[u(x+\Delta x) - 2u(x) + u(x-\Delta x)]}{(\Delta x)^2} +$$

$$\left. + \frac{u(x-\Delta x+\Delta x) - 2u(x-\Delta x) + u(x-\Delta x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} \right\} \cdot \frac{1}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{d^4u}{dx^4} = \frac{u(x+2\Delta x) - 4u(x+\Delta x) + 6u(x) - 4u(x-\Delta x) + u(x-2\Delta x)}{(\Delta x)^4}$$

ou

$$\frac{d^4u}{dx^4} = \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{(\Delta x)^4}$$

$$\bullet\ \frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = \frac{1}{2\Delta x}\left[\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x-\Delta x}\right]$$

$$= \frac{1}{2\Delta x}\left\{ \frac{u(x+2\Delta x) - 2u(x+\Delta x) - u(x)}{(\Delta x)^2} - \frac{[u(x) - 2u(x-\Delta x) + u(x-2\Delta x)]}{(\Delta x)^2} \right.$$

$$= \frac{u(x+2\Delta x) - 2u(x+\Delta x) + 2u(x-\Delta x) - u(x-2\Delta x)}{2(\Delta x)^3}$$

ou

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[\left.\frac{du}{dx}\right|_{x+\Delta x} - 2\left.\frac{du}{dx}\right|_{x} + \left.\frac{du}{dx}\right|_{x-\Delta x}\right]$$

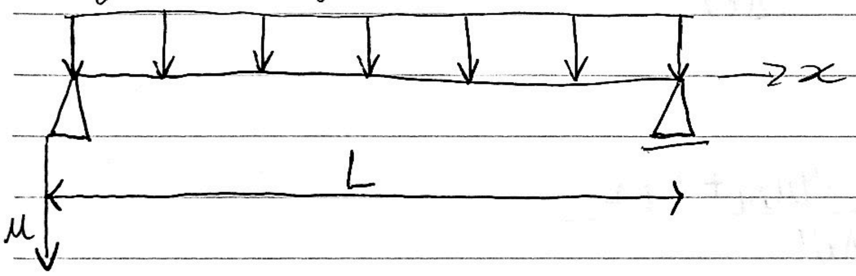
$$= \frac{1}{(\Delta x)^2}\left\{ \frac{u(x+2\Delta x) - u(x)}{2\Delta x} - \frac{2[u(x+\Delta x) - u(x-\Delta x)]}{2\Delta x} + \frac{u(x) - u(x-2\Delta x)}{2\Delta x} \right\}$$

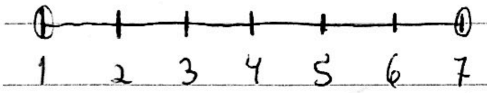
$$= \frac{u(x+2\Delta x) - 2u(x+\Delta x) + 2u(x-\Delta x) - u(x-2\Delta x)}{2(\Delta x)^3}$$

Simplificadamente,

$$\left.\frac{d^3u}{dx^3}\right|_{x_i} = \frac{u_{i+2}-2u_{i+1}+2u_{i-1}-u_{i-2}}{2(\Delta x)^3}$$

4) Dada uma viga simplesmente apoiada, de vão L com EI = cte, resolver a equação da linha elástica utilizando o MDF. Dividir o vão em seis partes iguais. Considerar um carregamento uniforme e distribuído ao longo da viga.





$x_1=0 \;\ldots\; x_7=L$

$i=2 \qquad \boxed{u_0} - 4\overset{=0}{\cancel{u_1}} + 6u_2 - 4u_3 + u_4 = \dfrac{q(\Delta x)^4}{EI}$

$i=3 \qquad \overset{=0}{\cancel{u_1}} - 4u_2 + 6u_3 - 4u_4 + u_5 = \dfrac{q(\Delta x)^4}{EI}$

$i=4 \qquad u_2 - 4u_3 + 6u_4 - 4u_5 + u_6 = \dfrac{q(\Delta x)^4}{EI}$

$i=5 \qquad u_3 - 4u_4 + 6u_3 - 4u_6 + \overset{=0}{\cancel{u_7}} = \dfrac{q(\Delta x)^4}{EI}$

$i=6 \qquad u_4 - 4u_5 + 6u_6 - 4\overset{=0}{\cancel{u_7}} + \boxed{u_8} = \dfrac{q(\Delta x)^4}{EI}$

$x=0, \quad \dfrac{d^2u}{dx^2} = 0$

$$\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x=0} = \frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{(\Delta x)^2} = 0 \Rightarrow u_0 - 2\cancel{u_1}^{\,0} + u_2 = 0 \Rightarrow \boxed{u_0 = -u_2}$$

$$x = L,\ \frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

$$\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x=L} = \frac{u_6 - 2u_7 + u_8}{(\Delta x)^2} = 0 \Rightarrow u_6 - 2\cancel{u_7}^{\,0} + u_8 = 0 \Rightarrow \boxed{u_8 = -u_6}$$

Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \frac{q(\Delta x)^4}{EI} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta x = \frac{L}{6}$$

$$\Delta x = \frac{L}{6} \quad \left. u \right|_{x=\frac{L}{2}} = u_{max} = 0.01331\ \frac{qL^4}{EI}$$

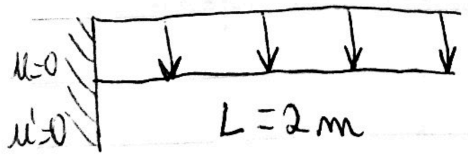
$$\Delta x = \frac{L}{12} \quad \left. u \right|_{x=\frac{L}{2}} = 0.013093\ \frac{qL^4}{EI}$$

$$u_{\substack{analítica \\ max}} = \frac{-5}{384}\frac{qL^4}{EI} = 0.013021\ \frac{qL^4}{EI}$$ deflexão máxima

Trabalho (07/07/2017)

$E = 30\ GPa$

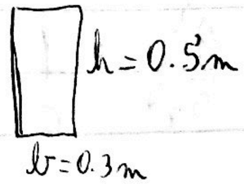
$\Delta x = \frac{L}{6}, \frac{L}{12}, \frac{L}{24}$



$u'' = 0$

$u''' = 0$

EI = constante



28/06/2017

Problema da Difusão Pura

$D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$

condições de contorno

u

$\frac{\partial u}{\partial x}$

condição inicial

u_0

- $D\left(\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{(\Delta x)^2}\right) = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t}$ $k = 0, 1, \dots, t$ $i = 1, 2, 3, \dots$

$u_i^{k+1} = D \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k\right) + u_i^k$

↳ Esquema Explícito (condicionalmente estável)

$\Delta t < \Delta t_{crítico} = \frac{(\Delta x)^2}{2D}$

- $D\left(\frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2}\right) = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t}$

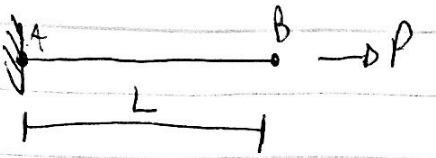
$D \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}\right) - u_i^{k+1} = -u_i^k$

↳ Esquema Implícito (incondicionalmente estável)

—— " —— " —— " ——

Vibração Longitudinal de Barras (Trabalho Optativo)

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

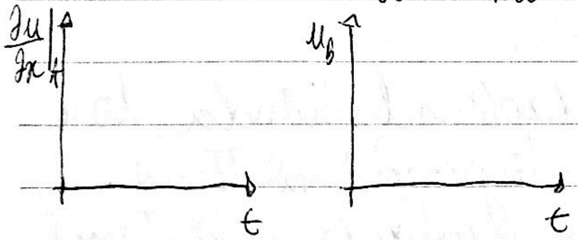


condições iniciais	condições de contorno
$u_0 = 0$	$u(0) = 0$
$\dot{u}_0 = 0$	$u(L) = P$

usar $c\Delta t < \Delta x$

* não montar sistema
* solução analítica: $u(x,t) = PL\left[\frac{x}{L} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\,\text{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\cdot\cos\frac{(2n-1)\pi c t}{2L}\right]$
* usa Progressiva

K. F. Graff - Wave motion in elastic solids
Dover Publications (pág 77)



$P = 1$
$L = ?$
$C = $ aço

// // //

Consistência, Convergência e Estabilidade

Para que a solução fornecida por um esquema numérico represente uma aproximação razoável da solução é necessário que o esquema utilizado apresente propriedades de consistência, convergência e estabilidade. As três propriedades estão inter-relacionadas na solução numérica e são funções dos erros envolvidos.

Consistência: Um esquema de diferenças finitas é dito consistente quando, ao serem refinadas as aproximações, no limite as aproximações tornam-se matematicamente equivalentes às equações diferenciais originais. Assim, se $\Delta x, \Delta y, \Delta t \to 0$, $\varepsilon \to 0$ (ε é o erro de truncamento da equação aproximada).

Convergência: a solução numérica tende para a solução exata à medida que se diminuem os incrementos espaciais e temporal. Se, no ponto $x = x_i$, u_i representa a solução exata e $\bar{u}_i$ representa a solução aproximada, o esquema é convergente quando o erro de discretização $w_i = u_i - \bar{u}_i$ tende para zero, em qualquer ponto i, à medida que se refina a discretização.

Estabilidade: é uma propriedade relacionada, basicamente, com o esquema de integração no tempo. Quando um esquema numérico qualquer é instável, uma pequena perturbação (um erro de truncamento, por exemplo, tende a crescer na medida em que o processo de cálculo avança no tempo, conduzindo a erros acima de valores toleráveis e comprometendo a solução numérica. Por exemplo, o emprego de diferença central para o problema massa-mola-amortecedor só é estável para valores do incremento de tempo inferiores a um valor crítico, dado por:

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{w_n} \qquad w_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$$