

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**  
**MÁRCIO ALEXANDRO MACIEL DE ANUNCIÇÃO**

**SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES USANDO MÉTODOS DE  
PROJEÇÃO E GRADIENTE CONJUGADO PRÉ-CONDICIONADO COM  
*MULTIGRID E SOLVER ILU***

**CURITIBA**

**2019**

**MÁRCIO ALEXANDRO MACIEL DE ANUNCIÇÃO**

**SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES USANDO MÉTODOS DE  
PROJEÇÃO E GRADIENTE CONJUGADO PRÉ-CONDICIONADO COM  
*MULTIGRID E SOLVER ILU***

Tese apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências, pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.

Orientador:

Prof. Dr. Marcio Augusto Villela Pinto

**CURITIBA**

**2019**

CATALOGAÇÃO NA FONTE – SIBI/UFPR

---

A636s

Anunciação, Márcio Alexandre Maciel de

Solução das equações de Navier-Stokes usando métodos de projeção e gradiente conjugado pré-condicionado com *multigrid* e *solver* ILU [recurso eletrônico]/ Márcio Alexandre Maciel de Anunciação. Curitiba, 2020.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Augusto Villela Pinto

1. Métodos de redes múltiplas (Análise numérica) 2. Análise matemática. I. Pinto, Marcio Augusto Villela. II. Título.

CDD 519.4

---

Bibliotecária: Vilma Machado CRB9/1563

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **MARCIO ALEXANDRO MACIEL DE ANUNCIACAO** intitulada: **SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES USANDO MÉTODOS DE PROJEÇÃO E GRADIENTE CONJUGADO PRÉ-CONDICIONADO COM MULTIGRID E SOLVER ILU**, sob orientação do Prof. Dr. MARCIO AUGUSTO VILLELA PINTO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.


CURITIBA, 16 de Outubro de 2019.



MARCIO AUGUSTO VILLELA PINTO  
Presidente da Banca Examinadora



VIVIANA COCCO MARIANI  
Avaliador Externo (PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ)



ELIAS ALFREDO GUDIÑO ROJAS  
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)



SIMONE DE FATIMA TOMAZZONI GONÇALVES  
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)



LUCIANO KIYOSHI ARAKI  
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Aos meus pais, Zelina e Nabor e à minha esposa, Lyohana.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente ao meu orientador, Prof. Dr. Marcio Augusto Villela Pinto, por não desistir de mim em nenhum momento, por ter sido mais que um professor orientador e sim, um ser humano incrível que sempre me apoiou, incentivou, inspirou, cobrou e compartilhou parte do seu enorme conhecimento.

Ao meu colega Réverton Luis Neundorf, pela disposição em ajudar sempre que necessário, principalmente na confecção dos códigos computacionais, pelas dúvidas que sanou e pelas contribuições sempre valiosas.

Agradeço aos membros da banca examinadora, Profa. Dra. Viviana Cocco Mariani, Profa. Dra. Simone de Fátima Tomazzoni Gonçalves, Prof. Dr. Elias Alfredo Gudiño Rojas, e Prof. Dr. Luciano Kiyoshi Araki pelo tempo despendido na leitura deste trabalho e pelas importantes sugestões apontadas.

Aos colegas Grazielli Vassoler Rutz e Sebastião Romero Franco, companheiros de caminhada, pela amizade e disposição em ajudar sempre que preciso.

Aos meus amigos e familiares, em especial meus pais, irmã, cunhado, afilhada e sogra, pelo carinho, amor e por sempre me apoiarem e confiarem em minha capacidade.

À minha esposa Lyohana Ançay, por estar sempre próxima, me apoiar, me incentivar e demonstrar o seu amor a todo momento, sem esquecer do motivo constante da nossa felicidade, nossa pequena Luna, cujo amor gratuito e infinito ajudou a esquecer dos problemas e tornar mais leve o dia-a-dia pelo simples fato de existir em nossa rotina.

Ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE) da Universidade Federal do Paraná (UFPR) pela oportunidade de cursar o doutorado e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

A todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

## RESUMO

Dentre os principais problemas da área da Dinâmica dos Fluidos Computacional encontra-se o escoamento laminar bidimensional em regime transiente de um fluido incompressível modelado pelas equações de Navier-Stokes. Dentre as formas de resolver este sistema de equações de maneira desacoplada, isto é, resolver as velocidades independentes da pressão, tem-se os métodos de projeção, que dividem a solução do problema em três partes, resolvidas em cada passo de tempo empregando um processo iterativo independente dos processos iterativos das outras variáveis. Pode-se recair, de acordo com o método de projeção utilizado, em duas equações de Reação-Difusão e uma equação de Poisson a serem resolvidas a cada passo de tempo. Neste trabalho buscou-se desenvolver um algoritmo para resolver as Equações de Navier-Stokes, utilizando-se o método dos Volumes Finitos, com esquema de aproximação de segunda ordem, além de um método de projeção com correção incremental na pressão, de modo que cada equação de Reação-Difusão e a equação de Poisson sejam resolvidas de maneira eficiente. Para isso, foram testados vários solvers para cada equação e ao final, foi gerado um algoritmo com as combinações que obtiveram os melhores resultados para cada equação, sendo que o método dos Gradientes Conjugados pré-condicionado com o método *Multigrid* e suavizador ILU (Fatoração LU Incompleta) foi a metodologia empregada que obteve os melhores resultados em todo processo de resolução do problema. Foi utilizado o Multigrid geométrico com ciclo V, esquema de correção, restrição por ponderação completa, prolongação utilizando interpolação bilinear e número máximo de níveis para os casos estudados. Os resultados obtidos mostraram-se bastante satisfatórios, pois a metodologia proposta acelerou em até 105 vezes o processo iterativo em relação aos métodos clássicos disponíveis na literatura.

**Palavras-chave:** Navier-Stokes, *Multigrid*, Gradiente Conjugado, Métodos de Projeção, Fatoração ILU.

## **ABSTRACT**

*Among the main problems in the field of Computational Fluid Dynamics there is the two-dimensional laminar flow in a transient regime of an incompressible fluid modeled by Navier-Stokes equations. Among the decoupled solutions for this equation system, that is, solutions for velocity regardless to pressure, there are the Projection methods, which separate the solution in three parts, solved in each time steps applying an iterative process regardless to the iterative process for the other variables. It may result, according to the Projection method applied, in two Reaction-Diffusion equations and one Poisson equation to be solved in each time step. This paper sought to develop an algorithm to solve the Navier-Stokes equation, applying the Finite Volume Method with second order approximation scheme, beside a Projection method with incremental pressure-correction scheme, so that each Reaction-Diffusion and the Poisson equation are solved efficiently. Therefore, several solvers were tested for each equation, resulting in an algorithm with the combination that achieved the best result for each equation, with the preconditioned Conjugate Gradient method with the Multigrid method and ILU solver (Incomplete LU factorization) being the methodology used in the whole problem solving process. The geometric Multigrid with V cycle, the correction scheme, the full weighting restriction, the prolongation through bilinear interpolation and the maximum number of levels for the studied cases were utilized. The results achieved were satisfactory, since the proposed methodology accelerated the iterative process up to 105 times in relation to the classical methods available in the literature.*

**Keywords:** *Navier-Stokes, Multigrid, Conjugated Gradient, Projection methods, ILU factorization.*



## LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 3.1: Método Gradiente Conjugado pré-condicionado.....	51
Algoritmo 3.2: Ciclo V com esquema CS para vários níveis de malhas. (adaptado de Briggs et al., 2000).....	59
Algoritmo 3.3: Diversas chamadas do <i>Multigrid</i> com esquema CS.....	59
Algoritmo 5.1: Método de Projeção .....	74

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Pontos de uma malha bidimensional uniforme: (a) notação indicial; (b) notação geográfica .....	22
Figura 3.1: Ordenação para Gauss-Seidel lexicográfico .....	39
Figura 3.2: Estruturas das matrizes $A$ , $L$ e $U$ .....	39
Figura 3.3: Representação genérica das matrizes $A = LU - R$ no método ILU de 5 pontos ....	40
Figura 3.4: Representação gráfica do método Gradiente Conjugado.....	48
Figura 3.5: Modos de Fourier com $k = 1, 3$ e $6$ (adaptada de BRIGGS et al., 2000) .....	54
Figura 3.6: Jacobi ponderado com fator de ponderação igual a $2/3$ aplicado ao problema de condução de calor unidimensional com $N = 64$ , estimativa inicial $(v_1 + v_6 + v_{32})/3$ e para 100 iterações (BRIGGS et al., 2000).....	55
Figura 3.7: Engrossamento padrão com razão de engrossamento $\tau = 2$ : (a) Malha fina original ( $\Omega^h$ ); (b) Malha imediatamente mais grossa ( $\Omega^{2h}$ ) .....	56
Figura 3.8: Processo de engrossamento e geração de malhas (adaptado de <a href="http://www.mgnet.org/mgnet/tutorials/xwb/mg.html">http://www.mgnet.org/mgnet/tutorials/xwb/mg.html</a> ) .....	57
Figura 3.9: Ciclo V para cinco malhas .....	58
Figura 5.1: Malha e ordenação lexicográfica das variáveis pressão e velocidades.....	63
Figura 5.2: Nomenclatura dos vizinhos genéricos dos volumes da malha bidimensional uniforme: (a) Posição dos índices $(i, j)$ de $p$ , $u$ e $v$ ; (b) Índices de $p$ ; (c) Índices de $u$ ; (d) Índices de $v$ .....	64
Figura 5.3: Disposição das variáveis: velocidades nas faces e pressão no centro dos volumes: (a) Disposição das variáveis no volume; (b) Posições das variáveis e vizinhos em ordem lexicográfica .....	65
Figura 5.4: Volumes de controle .....	65
Figura 6.1: Operador de restrição por ponderação completa para a variável centrada ( $p$ ).....	83
Figura 6.2: Operador de restrição por ponderação completa para as variáveis deslocadas ( $u$ e $v$ )	84
Figura 6.3: Operador de prolongação por interpolação bilinear para a variável centrada ( $p$ )..	85
Figura 6.4: Operador de prolongação por interpolação bilinear para a variável deslocada ( $u$ ) ....	86
Figura 6.5: Operador de prolongação por interpolação bilinear para a variável deslocada ( $v$ )	87
Figura 7.1: Norma infinito do erro numérico ( $\ E\ $ ) versus tamanho do problema ( $N$ ) para $p$ .	90
Figura 7.2: Norma $l_2$ do resíduo adimensionalizada pela norma da estimativa inicial versus número de iterações para o problema com $N = 1024 \times 1024$ para $p$ .....	90

Figura 7.3: Fator de convergência empírico ( $q^{(k)}$ ) <i>versus</i> tamanho do problema ( $N$ ) para $p$ ...	91
Figura 7.4: Tempo de CPU (em segundos) <i>versus</i> tamanho do problema ( $N$ ) para $p$ .....	91
Figura 7.5: Norma infinito do erro numérico ( $\ E\ $ ) <i>versus</i> tamanho do problema ( $N$ ) para $u$ .	93
Figura 7.6: Norma $l_2$ do resíduo adimensionalizada pela norma $l_2$ da estimativa inicial <i>versus</i> número de iterações para o problema com $N = 1024 \times 1024$ para $u$ .....	93
Figura 7.7: Fator de convergência empírico ( $q^{(k)}$ ) <i>versus</i> tamanho do problema ( $N$ ) para $u$ ....	94
Figura 7.8: Tempo de CPU (em segundos) <i>versus</i> tamanho do problema ( $N$ ).....	94
Figura 7.9: Norma $l_2$ do resíduo adimensionalizada pela norma $l_2$ da estimativa inicial <i>versus</i> número de iterações para o problema com $N = 128 \times 128$ para $u, v$ e $p$ .....	96
Figura 7.10: Fator de convergência empírico ( $q^{(k)}$ ) <i>versus</i> tamanho do problema ( $N$ ) para $u, v$ e $p$ .....	96
Figura 7.11: Tempo de CPU (em segundos) <i>versus</i> tamanho do problema ( $N$ ).....	97

## LISTA DE TABELAS

Tabela 7.1: <i>Speed-up</i> de MG-GS, MG-ILU e PCG-MG-GS em relação a PCG-MG-ILU ( $p$ )	92
Tabela 7.2: <i>Speed-up</i> de MG-GS, MG-ILU e PCG-MG-GS em relação a PCG-MG-ILU ( $u$ e $v$ ) .....	95
Tabela 7.3: <i>Speed-up</i> de GS em relação a PCG-MG-ILU .....	97
Tabela 7.4: Valores de $\rho$ e $c$ para os algoritmos das metodologias em estudo .....	98

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADI	<i>Alternate Direction Implicit Method</i>
CDS	<i>Central Differencing Scheme</i>
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
CPU	<i>Central Processing Unit</i>
CS	<i>Correction Scheme</i>
FAS	<i>Full Approximation Scheme</i>
GS	Gauss-Seidel
ILU	Fatoração LU Incompleta
LFA	<i>Local Fourier Analysis</i>
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MG	Método <i>Multigrid</i>
MSI	<i>Modified Strongly Implicit Method</i>
MVF	Método dos Volumes Finitos
PCG	Gradiente Conjugado pré-condicionado
TDMA	<i>Tridiagonal Matrix Algorithm</i>
TME	<i>Textbook Multigrid Efficiency</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	matriz dos coeficientes
$A$	matriz da parte advectiva no método de Projeção
$A^{-1}$	inversa da matriz $A$
$a_k, c_k, d_k, q_k$ e $g_k$	coeficientes da matriz $A$ no método ILU
$a_{i,j}$	coeficientes da matriz $A$
$c$	coeficiente do ajuste de curvas
$cond(A)$	número de condicionamento da matriz $A$
$D$	matriz diagonal
$D$	matriz da parte difusiva no método de Projeção
$e$	erro de uma aproximação numérica
$e^{(k)}$	vetor erro na $k$ -ésima iteração
$e_j$	$j$ -ésima componente do vetor erro
$f$	vetor independente ou termo fonte
$F$	ciclo F do <i>Multigrid</i>
$G_{GS}$	matriz de iteração do método Gauss-Seidel
$G_k$	$k$ -ésima matriz de iteração dos métodos Gradientes
$h$	tamanho do volume da malha fina $\Omega^h$
$H$	tamanho do volume da malha imediatamente mais grossa $\Omega^H$
$h_t$	refinamento temporal
$h_x$	tamanho da malha na direção $x$
$h_y$	tamanho da malha na direção $y$
$I$	operador identidade
$I_h^{2h}$	operador de restrição
$I_{2h}^h$	operador de prolongação
$ITE_{\max}$	número máximo de iterações externas
$k$	constante da equação de Helmholtz
$k$	número do modo de Fourier
$K^k$	subespaço de Krylov $k$ -dimensional
$L$	matriz triangular inferior

$L^{(k)}$	subespaço de restrições do subespaço de Krylov de dimensão $k$
$l_1$	norma 1
$l_2$	norma Euclidiana
$l_{ij}$	coeficientes da matriz $L$
$l_\infty$	norma infinito
$M$	matriz de pré-condicionamento
$\mathbf{n}$	vetor normal ao contorno
$n_x, n_y$	componentes $x$ e $y$ do vetor normal
$N$	matriz erro da decomposição matricial
$N$	número total de volumes.
$N_x$ e $N_y$	número de volumes nas direções $x$ e $y$
$N_{xp}, N_{xu}$ e $N_{xv}$	número de volumes para a pressão e velocidades na direção $x$
$p$	pressão estática do fluido
$p^{(k)}$	direção de descida na $k$ -ésima iteração
$P$	matriz inversível pré-multiplicadora
$P$	prolongação
$p^n$	pressão no passo de tempo $n$
$Q$	matriz inversível pós-multiplicadora
$q^{(k)}$	fator de convergência empírico na $k$ -ésima iteração
$\tilde{r}^{(k)}$	resíduo auxiliar na $k$ -ésima iteração
$r^{(k)}$	vetor resíduo na $k$ -ésima iteração
$R$	matriz resíduo do método ILU
$R$	restrição
$Re$	número de Reynolds
$s$	segundos
$S$	suavização
$S$	matriz simétrica definida positiva
$S_p$	<i>speed-up</i>
$t$	coordenada temporal
$t_{CPU}$	tempo de CPU
$T_i$	tempo inicial
$u$	vetor incógnita

$u$	velocidade na direção $x$
$\mathbf{u}$	campo de velocidades
$u^t$	componente da velocidade auxiliar na direção $x$
$\mathbf{u}^T$	vetor incógnita transposto
$u_{ij}$	coeficientes da matriz $U$
$\mathbf{u}^n$	campo de velocidades no passo de tempo $n$
$\mathbf{u}^t$	campo de velocidade auxiliar no método de Projeção
$U$	matriz triangular superior
$v$	solução aproximada de $u$
$v$	velocidade na direção $y$
$v^t$	componente da velocidade auxiliar na direção $y$
$V$	ciclo $V$ do <i>Multigrid</i>
$x, y$	variáveis do sistema cartesiano bidimensional
$W$	ciclo $W$ do <i>Multigrid</i>
$W$	matriz de pré-condicionamento
$z$	solução auxiliar no método ILU

### Símbolos

$\nabla$	operador gradiente
$\nabla \cdot$	operador divergente
$\nabla^2$	operador laplaciano
$\ \cdot\ $	norma infinito
$\ \cdot\ _2$	norma euclidiana ou norma $l_2$
$\approx$	aproximadamente igual
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produto interno
$\ll$	muito menor que
$\gg$	muito maior que
$\forall$	para todo
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais



## Letras gregas

$\alpha, \gamma, \delta, \mu$ e $\eta$	matrizes envolvidas no método ILU
$\alpha_k, \gamma_k, \delta_k, \mu_k$ e $\eta_k$	coeficientes das matrizes $D, L$ e $U$ no método ILU
$\beta_k$ e $\omega_k$	coeficientes do método Gradiente Conjugado
$\beta$	constante do método de Projeção
$\varepsilon$	tolerância
$\tau$	razão de engrossamento
$\rho$	ordem do <i>solver</i> no ajuste de curvas
$\Delta$	correção da solução
$\Gamma$	número de níveis
$\nu$	inverso do número de Reynolds
$\nu_1$	número de pré-suavização
$\nu_2$	número de pós-suavização
$\kappa$	constante da equação de Helmholtz
$\eta$	constante da equação de Reação-Difusão
$\phi^n$	correção da pressão no passo de tempo $n$
$\omega_k$	fator de relaxação
$\Omega$	malha correspondente ao domínio contínuo
$\Omega^h$	malha mais fina
$\Omega^{2h}$	malha mais grossa ( $2h$ )

## Subscritos

$i, j, k, m, n, p$	contadores
$E$	ponto localizado à direita do ponto $P$
$N$	ponto localizado ao norte do ponto $P$
$P$	ponto genéricos da malha
$pp, pu$ e $pv$	posições genéricas da pressão e velocidades $u$ e $v$ .
$S$	ponto localizado ao sul do ponto $P$
$SW$	ponto localizado a sudoeste do ponto $P$

$W$  ponto localizado à esquerda do ponto  $P$

### **Sobrescritos**

$h, 2h, 4h, \dots$  indicadores da posição da malha

$k$   $k$ -ésima iteração

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	21
1.1 GENERALIDADES EM CFD .....	21
1.2 MOTIVAÇÃO (RELEVÂNCIA DA PESQUISA).....	24
1.3 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA E METODOLOGIA .....	25
1.4 OBJETIVOS .....	27
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	29
2.1 MÉTODO <i>MULTIGRID</i> .....	29
2.2 MÉTODO GRADIENTE CONJUGADO PRÉ-CONDICIONADO .....	30
2.3 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES E MÉTODOS DE PROJEÇÃO .....	33
<b>3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	37
3.1 MÉTODOS ITERATIVOS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES	37
3.1.1 Método de Gauss-Seidel .....	37
3.1.2 Decomposição LU incompleta (ILU) .....	39
3.1.3 Método Gradiente Conjugado pré-condicionado .....	45
3.2 NOÇÕES BÁSICAS DO MÉTODO <i>MULTIGRID</i> .....	52
3.2.1 Equação residual .....	52
3.2.2 A filosofia do método <i>Multigrid</i> .....	53
3.2.3 Ciclos e algoritmos .....	57
<b>4 MODELO MATEMÁTICO</b> .....	60
<b>5 MODELO NUMÉRICO</b> .....	63
5.1 TIPO DE MALHA UTILIZADA .....	63
5.2 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL POR VOLUMES FINITOS .....	65
5.3 MÉTODOS DE PROJEÇÃO .....	68
5.4 DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DAS VELOCIDADES E DA PRESSÃO.....	73
5.4.1 Coeficientes das velocidades para os volumes internos .....	76
5.4.2 Coeficientes das velocidades para os volumes com contornos .....	77

5.4.3 Coeficientes da pressão para os volumes internos .....	79
5.4.4 Coeficientes da pressão para os volumes com contornos .....	79
5.5 CONDIÇÃO DE INTEGRABILIDADE E ESTABILIDADE .....	81
<b>6. OPERADORES DE TRANSFERÊNCIA ENTRE MALHAS PARA O MÉTODO MULTIGRID .....</b>	<b>83</b>
<b>7 RESULTADOS .....</b>	<b>88</b>
7.1 DETALHES COMPUTACIONAIS .....	88
7.2 ANÁLISE DA PRESSÃO .....	89
7.3 ANÁLISE DAS VELOCIDADES .....	92
7.4 ALGORITMO .....	95
<b>8 CONCLUSÕES.....</b>	<b>99</b>
8.1 CONSTATAÇÕES GERAIS .....	99
8.2 CONTRIBUIÇÕES .....	99
8.3 TRABALHOS FUTUROS .....	100
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>101</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são descritas algumas generalidades da Dinâmica dos Fluidos Computacional (*Computational Fluid Dynamics*, CFD), sobre o método *Multigrid*, método Gradiente Conjugado e pré-condicionamento de matrizes. Será descrita a motivação para a realização do trabalho, a definição do problema e os objetivos geral e específicos desta pesquisa.

### 1.1 GENERALIDADES EM CFD

Segundo Maliska (2004) a dinâmica dos fluidos envolve a modelagem de fenômenos físico-químicos relacionados à mecânica dos fluidos, transferência de calor e massa, combustão, entre outros. A resolução desses problemas por meio de métodos numéricos é o campo de estudo da CFD.

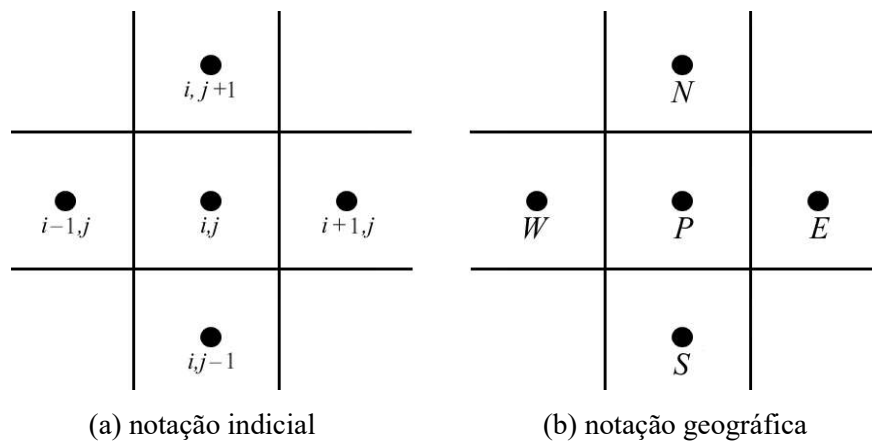
De acordo com Fortuna (2000), o objetivo principal em CFD é reduzir o número de experimentos e explorar fenômenos que não poderiam ser estudados em laboratório de forma prática. Para obter a solução de um problema em Engenharia podem ser empregados três tipos de métodos: experimentais, analíticos e numéricos, sendo que cada um possui suas vantagens e desvantagens (TANNEHILL et al., 1997).

Em geral, na descrição qualitativa de um fenômeno físico, os modelos matemáticos resultantes são expressos por sistemas de equações diferenciais, válidas em todo o domínio do problema. A esse sistema são impostas condições de contorno e/ou condições iniciais apropriadas. Um sistema de equações diferenciais constitui um modelo contínuo, nos quais, com exceção de casos mais simples, as soluções analíticas não são conhecidas, ou são difíceis de serem determinadas. Recorre-se, então, aos modelos discretos (ou numéricos), nos quais o problema real, contínuo, é solucionado para uma quantidade finita de pontos do domínio (discretização do domínio). Esse conjunto de pontos é denominado malha.

Para cada ponto da malha, deve-se, então, realizar a discretização das equações diferenciais parciais que descrevem o fenômeno físico. Isso é feito através de aproximações, que podem ser feitas de diferentes formas, de acordo com o método numérico adotado. Dentre os métodos numéricos mais usuais, citam-se: o método dos Elementos Finitos (MEF) (HUGHES, 2000; REDDYE e GARTLING, 1994), o método dos Volumes Finitos (MVF) (MALISKA, 2004; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007), o método dos Elementos de Contorno (MEC) (BREBBIA et al., 1984), o método das Diferenças Finitas (MDF) (CHAPRA e CANALE, 2008; FORTUNA, 2000; TANNEHILL et al., 1997), por exemplo.

Neste trabalho foi utilizado o método dos Volumes Finitos (MALISKA, 2004; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007), onde o domínio é subdividido em volumes de controle ou células. Os pontos nodais ou simplesmente nós, são os centros das células. No método dos Volumes Finitos, a equação diferencial é integrada sobre cada volume de controle. As integrais obtidas são então aproximadas. As equações integrais adquirem a forma de leis de conservação, o que assegura a conservação das grandezas físicas tratadas em cada volume de controle (conservação no nível discreto) e, portanto, este método é bastante adequado para tratar de fenômenos físicos que envolvem leis de conservação.

A Fig. 1.1(a) mostra o recorte de uma malha bidimensional em que são utilizados 5 volumes para resolver cada equação do sistema de equações algébricas. Nela é usada a notação indicial  $(i, j)$ . A Figura 1.1(b) apresenta uma outra notação para os volumes da malha da Fig. 1.1(a), “notação geográfica” correspondente, com  $E$  representando o ponto ao leste,  $W$  o ponto a oeste,  $N$  ao norte e  $S$  ao sul do ponto central  $P$ . Ao longo desta tese, as adaptações envolvendo essas notações e nomenclaturas são feitas onde e da maneira que for mais adequada.



**Figura 1.1: Pontos de uma malha bidimensional uniforme.**

A malha considerada é dada por  $\Omega^h = \{(i, j), i = 1, \dots, N_x; j = 1, \dots, N_y\}$ , onde  $N_x$  é o número de volumes da direção  $x$ ,  $N_y$  é o número de volumes na direção  $y$  e  $N = N_x N_y$  indica o número total de volumes.

O processo de discretização do modelo contínuo para o modelo discreto, usando uma malha de pontos e o método numérico escolhido, gera um sistema de equações algébricas. Para casos mais simples, os sistemas de equações gerados na discretização pelo MVF são lineares, mas há casos onde os sistemas de equações gerados são não-lineares. Quanto maior for o número de pontos utilizados na discretização, mais fina será a malha, menor será o erro de discretização (ocorrem quando o modelo matemático é aproximado por um método numérico)

associado à resolução do problema, porém, será necessário um maior esforço computacional, devido aos tamanhos dos sistemas lineares resolvidos.

Os sistemas lineares possuem a forma

$$Au = f, \quad (1.1)$$

onde  $A$  é a matriz dos coeficientes,  $f$  é o vetor independente (também chamado de fonte) e  $u$  é o vetor incógnita. Ao utilizar o MVF, para uma malha muito refinada, esses sistemas lineares são de grande porte e, em geral, a matriz  $A$  é esparsa, ou seja, possui um número grande de termos nulos. Além disso, para alguns tipos de malhas ou métodos, surgem matrizes tipo banda, ou seja, com elementos diferentes de zero apenas na diagonal principal e em algumas diagonais paralelas a essa.

Métodos diretos, como a eliminação de Gauss (CHAPRA e CANALE, 2008), podem ser usados para resolver sistemas lineares de pequeno porte (da ordem de  $10^2$  incógnitas) com matrizes não esparsas. Por outro lado, os métodos iterativos, como Gauss-Seidel (BRIGGS et al., 2000; TROTTEBERG et al., 2001), têm um bom desempenho com sistemas de maior porte (da ordem de  $10^5$  incógnitas) com matrizes esparsas. Outra alternativa são os métodos de Subespaço de Krylov (SAAD, 2003), como o método Gradiente Conjugado, que possui um caráter de método direto, porém, se torna iterativo ao passo em que os erros de arredondamento passam a interferir na obtenção da solução exata do problema. Tal método funciona bem quando a matriz  $A$  é simétrica, definida positiva e bem condicionada, características que serão definidas e abordadas no decorrer do texto.

Os métodos iterativos clássicos produzem uma sequência de vetores a partir de uma aproximação inicial. Sob certas condições, esta sequência converge para a solução exata, caso ela exista. Do ponto de vista prático, busca-se resolver os problemas em malhas muito refinadas, como forma de minimizar os erros de discretização. Neste caso tem-se sistemas lineares de grande porte, de modo que são os métodos iterativos os mais empregados. Neste trabalho, tais métodos iterativos serão chamados de *solvers*.

Métodos da classe dos subespaços de Krylov possuem a propriedade de convergir lentamente ou até mesmo não convergir quando a matriz  $A$  é mal condicionada. Nestes casos pode-se contornar tais dificuldades fazendo-se uso de pré-condicionadores, isto é, matrizes que transformam o sistema linear original em outro equivalente ao primeiro, mas com propriedades favoráveis à convergência (SAAD, 2003), sendo que dentre as técnicas de pré-condicionamento podemos citar a Fatoração LU Incompleta (ILU) que consiste em transformar a matriz  $A$  em um produto de uma matriz triangular inferior  $L$  por uma matriz triangular superior  $U$ , aliada a

uma matriz denominada resíduo  $R$  onde são colocados os elementos a fim de se manter em  $L$  e  $U$  a esparsidade da matriz original  $A$ , ou uma outra esparsidade desejada. Neste caso tem-se, então  $A = LU - R$ .

Nas últimas décadas, um grande avanço na aceleração da taxa de convergência de processos iterativos se deu pelo desenvolvimento do método *Multigrid*, proposto originalmente por Fedorenko (1964), um trabalho clássico, cuja filosofia está baseada no emprego de malhas auxiliares, mais grossas, nas quais as componentes do erro numérico são adequadamente suavizadas, de modo que o processo iterativo se torna mais rápido (detalhes serão apresentados no capítulo 3).

O método *Multigrid* está entre as técnicas mais eficientes utilizadas na solução de equações elípticas (BRIGGS et al., 2000; TROTTEBERG et al., 2001) porque o número de operações aritméticas que precisam ser realizadas para atingir o nível do erro de discretização é proporcional ao número de incógnitas do sistema de equações a ser resolvido (MCBRYAN, 1990). Esta relação entre o número de operações aritméticas e o número de incógnitas é uma das virtudes do método *Multigrid* e é conhecida como *Textbook Multigrid Efficiency* (TME) (THOMAS et al., 2003).

A busca pela redução do tempo computacional para resolução de problemas de grande porte tem sido fonte de pesquisa constante, pois torna-se inerente a essa busca a necessidade de constantes melhorias nos algoritmos já utilizados. Tendo em vista a quantidade de métodos que já estão bem definidos ao longo do tempo na literatura, suas particularidades, restrições e casos em que podem ser aplicados; a ideia de unir técnicas vantajosas de uma classe de métodos em um único algoritmo, tornando-o mais eficiente que os já existentes, se apresenta como uma possibilidade de pesquisa interessante e aceitável.

## 1.2 MOTIVAÇÃO (RELEVÂNCIA DA PESQUISA)

A busca por soluções das equações de Navier-Stokes, que modelam problemas de escoamento, é um importante problema estudado em Mecânica dos fluidos. Trata-se de um sistema de equações diferenciais parciais não lineares de segunda ordem. Suas soluções analíticas não podem ser obtidas, exceto para campos de escoamento muito simples. Portanto, a obtenção de soluções numéricas para escoamentos em campos mais complexos é objeto de pesquisa há muitos anos e permanece até hoje.

Neste trabalho, tal sistema irá representar um problema de escoamento laminar bidimensional de um fluido incompressível e em regime transiente.



Existem vários métodos utilizados para resolver numericamente tais equações. Dentre estes métodos, os métodos de passo fracionário, frequentemente referidos na literatura como métodos de Projeção (GUERMOND et al., 2006) são bastante populares. Eles se dividem de acordo com a forma que ocorre a correção em uma das variáveis envolvidas na resolução do problema, conforme será detalhado no capítulo 5. Ocorre que em cada etapa dos métodos de Projeção, são resolvidas equações elípticas para a pressão e a velocidade de forma desacoplada (independentes entre si), o que representa o aspecto mais atrativo destes métodos. Porém, recaem-se em sistemas de equações lineares de grande porte, pois busca-se soluções em malhas refinadas para redução de erros numéricos. Por isso a importância de aprimorar métodos para resolução de sistemas lineares.

Encontrar a solução de sistemas de equações lineares e não-lineares é um problema importante em Matemática Computacional. Métodos iterativos são amplamente utilizados para encontrar essas soluções. Entretanto, esse problema é muitas vezes difícil de ser resolvido, devido à convergência lenta do processo iterativo adotado (MITIN, 1985). O método *Multigrid* tem se mostrado extremamente eficiente na resolução de sistemas de equações lineares resultantes da discretização de equações diferenciais. Para uma ampla classe de diferentes problemas, o *Multigrid* é considerado um método eficiente, como pode ser verificado nos resultados de Fedorenko (1964), Brandt (1977), Briggs et al. (2000) e Trottenberg et al. (2001), porém, dependendo da complexidade do problema, este método pode apresentar desempenho ainda inadequado ou insuficiente.

Outros métodos para resolução de sistemas de equações têm por finalidade a minimização da norma do erro, sendo chamados de métodos de Subespaços de Krylov, métodos de descida ou descendentes (SAAD, 2003), que nem sempre convergem rapidamente devido a características pouco favoráveis para este fim, relativas ao número de condicionamento da matriz  $A$ . Pode-se, então, tornar um método iterativo mais rápido, modificando-se a matriz dos coeficientes do sistema de equações, a fim de melhorar seu número de condicionamento. Tal procedimento é chamado de pré-condicionamento de matrizes (SAAD, 2003).

O que motivou essa pesquisa foi a necessidade de resolução destes sistemas de equações lineares de forma mais rápida e eficiente que os métodos já difundidos na literatura, aliado a um baixo custo computacional.

### **1.3 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA E METODOLOGIA**

Ao se discretizar as equações que modelam determinados fenômenos físicos, como o escoamento de um fluido, são gerados sistemas de equações com um elevado número de

incógnitas de modo que o processo de convergência de métodos iterativos pode apresentar um desempenho inadequado. O método *Multigrid* apresenta-se como uma boa alternativa para acelerar o processo de convergência, porém, seu uso com *solvers* clássicos ainda pode ser insuficiente.

Existem vários métodos utilizados para resolver numericamente o escoamento laminar bidimensional em regime transiente de um fluido incompressível modelado pelas equações de Navier-Stokes. Bastante populares, os métodos de passo fracionário, frequentemente referidos na literatura como métodos de projeção, podem ser divididos em três classes (Guermond et al., 2006): esquemas de correção na pressão (*pressure-correction schemes*), esquemas de correção na velocidade (*velocity-correction schemes*) e esquemas de divisão consistente (*consistent splitting schemes*).

O primeiro, e mais simples, método considerado de projeção foi proposto por Chorin (1968) e Temam (1969). Na primeira etapa do algoritmo e utilizando-se o método de Euler na discretização temporal, o algoritmo consiste em criar uma velocidade auxiliar (também conhecida como temporária ou ainda preditiva) com a qual se estimam as velocidades no passo de tempo atual a partir do valor das velocidades no passo anterior ignorando a pressão. Nesta etapa é resolvida uma equação do tipo Reação-Difusão, um caso particular da equação de Helmholtz (ERNST, 2012). Na segunda etapa é calculada a pressão a partir da velocidade auxiliar. Nesta etapa, em que é realizada a projeção, são aplicadas as condições de incompressibilidade (no cálculo da pressão), onde aparece uma equação do tipo Poisson. Com o valor da pressão é realizada a correção da velocidade no tempo atual.

O fato de que em cada uma das etapas dos métodos de projeção serem resolvidas equações elípticas para a pressão e velocidades de forma desacoplada representa o aspecto mais atrativo destes métodos. No entanto, por mais que seja usado o método *Multigrid* nas etapas dos métodos de projeção, se o solver interno do *Multigrid* não for eficiente, os resultados podem não ser satisfatório ainda assim. Desta forma, surge a necessidade de melhorar tais solvers, o que foi objeto de estudo e a contribuição deste trabalho, pois foram analisadas inúmeras combinações entre métodos numéricos para resolução de sistemas de equações, até que se obteve o mais eficiente, dentre os estudados, tanto para a equação de Poisson, quanto para a equação de Reação-Difusão.

O estudo apresentado nesta pesquisa envolveu, basicamente, duas etapas:

Na primeira, foi resolvido numericamente o problema de condução de calor bidimensional em regime permanente descrito pela equação de Poisson, usando *Multigrid* com os *solvers* Gauss-Seidel e ILU, além do método Gradiente Conjugado pré-condicionado com *Multigrid* e os *solvers* Gauss-Seidel e ILU.

Nesta etapa, foram analisados os parâmetros: queda do resíduo, norma do erro numérico, fator de convergência empírico, tempo de CPU (*Central Processing Unit*) e número de iterações internas dos *solvers*. Esses parâmetros são determinados a partir da obtenção das soluções numéricas, e para serem comparados, diferentes variantes do método numérico de obtenção das soluções do modelo matemático foram propostas e os resultados foram apresentados em Anunciação et al. (2017).

Depois de realizadas todas as simulações, foi possível verificar que a ideia proposta poderia ser levada adiante na resolução de um problema mais complexo, como o modelado pelas equações de Navier-Stokes e levando-se em conta que os resultados se mostraram promissores em relação à aceleração do processo iterativo, redução do erro numérico, com o melhor fator de convergência empírico, partiu-se para a segunda e principal etapa.

Na segunda etapa, cujos resultados estão presentes neste texto, foi resolvido o problema de escoamento laminar bidimensional de um fluido incompressível em regime transiente, modelado pelas equações de Navier-Stokes, usando um método de Projeção, permitindo que as variáveis primárias (pressão e velocidades nas direções  $x$  e  $y$ ) pudessem ser determinadas de maneira desacoplada, ou seja, independentes entre si. Com o método de Projeção utilizado, recaiu-se em duas equações do tipo Reação-Difusão, que é um caso particular da Equação de Helmholtz (ERNST, 2012), para se determinar as velocidades nas direções coordenadas e uma equação de Poisson para a pressão do fluido, conforme será detalhado no capítulo 4. Deste modo, usando as técnicas citadas na primeira etapa do estudo, buscou-se desenvolver o algoritmo que apresentasse os melhores resultados para os parâmetros analisados, tanto para a equação de Poisson, quanto para as equações de Reação-Difusão, ou seja, aquele que resolveu de maneira mais eficiente as equações de Navier-Stokes discretizadas usando um método de Projeção, sendo que tais resultados foram comparados com um estudo que tratou o mesmo problema e também envolveu métodos de Projeção, *Multigrid* e *solver* Gauss-Seidel (NEUNDORF et al., 2016).

## 1.4 OBJETIVOS

Neste estudo, pretende-se resolver o problema de escoamento laminar bidimensional de um fluido incompressível em regime transiente governado pelas equações de Navier-Stokes com número de Reynolds igual à unidade.

O objetivo geral é:

- resolver numericamente as equações de Navier-Stokes nas variáveis primárias  $u$ ,  $v$  e  $p$  de forma desacoplada, utilizando no processo de discretização, um método de Projeção e o melhor algoritmo dentre todas as combinações estudadas e avaliadas.

Os objetivos específicos são:

- gerar um algoritmo para resolver as equações de Navier-Stokes para as variáveis primárias  $u$ ,  $v$  e  $p$  usando um método de Projeção que permite calculá-las de forma desacoplada por meio de equações do tipo Reação-Difusão para as velocidades e Poisson para a pressão, respectivamente.

- usar o método Gradiente Conjugado pré-condicionado com *Multigrid* e *solver* ILU de modo a obter uma taxa de convergência melhor do que as que existem na literatura para programação serial.

- comparar os resultados de testes com diversas combinações de métodos iterativos a fim de se determinar aquele que se mostra mais eficiente na resolução de cada uma das equações (Reação-Difusão e Poisson).

- avaliar e comparar os valores de alguns parâmetros relacionados à velocidade de convergência das metodologias propostas, que servirão de métrica para se determinar a eficiência dos algoritmos.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo são citados alguns trabalhos que estudaram o método *Multigrid*, método Gradiente Conjugado pré-condicionado e equações de Navier-Stokes, sendo que também são listadas pesquisas que tratam da teoria e aplicação dos métodos de Projeção para as equações de Navier-Stokes.

### 2.1 MÉTODO *MULTIGRID*

A rapidez com que um sistema linear é resolvido por meio de um método iterativo pode ser avaliada através de um parâmetro denominado taxa de convergência. Por isso, diversos trabalhos têm como objetivo de estudo o aumento dessa taxa. Dentre as diferentes possibilidades, um método bastante eficiente e que tem sido muito empregado é o chamado método *Multigrid* (BRIGGS et al., 2000; WESSELING, 2004 e HACKBUSH, 1985).

As conclusões de Fedorenko (1964) mostraram que a velocidade de convergência do *Multigrid* é melhor que a dos métodos iterativos puros (sem o uso do *Multigrid*), pois o objetivo do método *Multigrid* é acelerar a convergência de um processo iterativo (TANNEHILL et al., 1997).

Segundo Wesseling (2004), os melhores desempenhos do método *Multigrid* são obtidos em problemas totalmente elípticos, ou seja, problemas dominados pela difusão; e os menores, de acordo com Ferziger e Peric (2002), em problemas dominados pela advecção.

Wesseling e Oosterlee (2001) citam vários desafios relacionados ao uso do *Multigrid* geométrico, como a solução das equações de Navier-Stokes, problemas com perturbações singulares, problemas de camada limite onde aparecem as malhas fortemente distorcidas (anisotropia geométrica), ou mesmo a paralelização de algoritmos.

Segundo Roache (1998), um aumento na eficiência do método permite no mesmo tempo computacional, resolver um problema em uma malha mais refinada, isto é, com maior número de nós. Assim, pode-se obter uma solução numérica com menor erro de discretização, melhorando a qualidade e a confiabilidade dos resultados.

Em Trottenberg et al. (2001), experiências com o método *Multigrid* mostraram que seus parâmetros (número de malhas, suavizador ou *solver*, número de iterações no *solver*, ciclos, formas de percorrer um ciclo e os esquemas de restrição e interpolação) podem ter uma forte influência na eficiência do algoritmo. Segundo Trottenberg et al. (2001), não há regras gerais na escolha destes parâmetros, porém certas escolhas podem ser recomendadas para determinadas situações.

Jimack (2007) apresentou a combinação do *Multigrid* com outras técnicas numéricas modernas, como malhas adaptativas, discretização de alta ordem, computação paralela, etc., em diversos problemas não lineares de CFD. Porém, ainda existem obstáculos a serem superados quando essas técnicas são utilizadas em problemas em regime transiente.

O grupo de pesquisa liderado pelo prof. Marcio Villela, da Universidade Federal do Paraná, tem dedicado esforços no estudo de parâmetros ótimos do *Multigrid*; os principais resultados podem ser encontrados nas teses de doutorado de Pinto (2006), Oliveira (2010), Santiago (2010), Suero (2010), Gonçalves (2013) e Vargas (2013); nos artigos de revistas produzidos por Oliveira et al. (2012), Suero et al. (2012), Santiago (2015), Pinto et al. (2016), Franco et al. (2018), Oliveira et al. (2018) e Rutz et al. (2019) e em diversos trabalhos em congressos nacionais e internacionais (COBEM, CILAMCE, CMAC, CNMAC, ENCIT, CONEM, etc).

## 2.2 MÉTODO GRADIENTE CONJUGADO PRÉ-CONDICIONADO

O método Gradiente Conjugado é um exemplo de método do subespaço de Krylov restrito a matrizes simétricas definidas positivas (SAAD, 2003), tem sido estudado a partir da década de 50, motivado pela solução de sistemas provenientes da discretização de equações diferenciais parciais e viabilizado pela entrada dos computadores nos cálculos científicos. Vários autores citam os trabalhos de Hestenes e Stiefel (1952), como base do que foi desenvolvido posteriormente. Sua ideia básica está na resolução de um sistema linear por meio da minimização da função resíduo a fim de se obter a solução do sistema linear a cada passo do processo iterativo. Como é conhecido do Cálculo Diferencial (STEWART, 2013), o vetor gradiente aponta a direção do máximo da função. Portanto é natural que nos passos de busca do mínimo, caminhe-se na direção contrária ao gradiente.

Golub e Ortega (1993) destacam os métodos do tipo Gradiente Conjugado. Um grande número de métodos iterativos para resolver sistemas lineares de equações pode ser derivado como métodos de minimização. No contexto da minimização, o método de Gauss-Seidel é às vezes conhecido como o método de relaxamento univariável, porque em cada iteração, apenas uma única variável é alterada. A maneira mais eficiente de obter um conjunto de vetores de direções conjugadas é utilizar o método Gradiente Conjugado, o qual gera os vetores de direção em conjunto com a realização do método de Direção Conjugada (SAAD, 2003).

Trottenberg et al. 2001, discutem brevemente os métodos de subespaço de Krylov pré-condicionados, pois em geral, as iterações de subespaço de Krylov são lentas, sendo que a sua eficácia depende fortemente do número de condição da matriz  $A$  e sobre a distribuição de seus

autovalores. Se o sistema original  $Au = f$  é pré-condicionado com um pré-condicionador adequado à esquerda ou à direita, o número de condição muitas vezes pode ser significativamente melhorado. Correspondentemente, o desempenho destes processos de solução é substancialmente melhorado (MEIJERINK e VAN DER VORST, 1977).

Ainda segundo Trottenberg et al. (2001), da mesma forma que os métodos *singlegrid* (uma única malha) clássicos podem ser usados como pré-condicionadores, também é possível utilizar *Multigrid* como um pré-condicionador. Para problemas com matrizes simétricas definidas positivas, a robustez de *Multigrid* como um pré-condicionador para o método Gradiente Conjugado foi demonstrada em (KETTLER, 1982).

De acordo com Trottenberg et al. (2001) há uma questão a ser decidida: *Multigrid* deve ser usado como um *solver* ou como um pré-condicionador? A questão a responder, de acordo com os autores, é qual a abordagem a utilizar e quando, pois não é útil acelerar um algoritmo *Multigrid* altamente eficiente (com um fator de convergência ideal) pela aceleração do subespaço de Krylov. O esforço extra não vale a pena. Entretanto concluem que o *Multigrid* como um pré-condicionador é particularmente interessante no que diz respeito à robustez.

Um argumento para combinar *Multigrid* com uma técnica de aceleração é que os problemas se tornam cada vez mais complexos se tratarmos as aplicações da vida real. Para tais aplicações, está longe de ser trivial escolher componentes *Multigrid* ótimos uniformemente para uma grande classe de problemas. Frequentemente, ocorrem simultaneamente complicações diferentes, tais como dominância de convecção, anisotropias, não-linearidades ou elementos positivos do estêncil fora das diagonais.

Portanto, a idéia fundamental do *Multigrid* de reduzir as componentes de alta frequência do erro por procedimentos de suavização e cuidar dos componentes de erro de baixa frequência por correções de malha grossa, não funciona de forma ideal em todos os casos. Certas componentes de erro podem permanecer grandes mesmo após o procedimento descrito anteriormente (procedimento de suavização e de duas malhas). Essas componentes de erro específicos (e as autofunções/autovalores correspondentes) são então responsáveis pela baixa convergência do método *Multigrid*. Em tais situações, a combinação com métodos de subespaço de Krylov pode ter o potencial de uma aceleração substancial (TROTTEMBERG et al., 2001).

O *Multigrid* como pré-condicionador também é interessante para vários outros problemas, por exemplo, em malhas não estruturadas, para problemas de camada limite que não são visíveis em malhas grossas (BRANDT e MIKULINSKY, 1995) e para problemas com singularidades geométricas.

Segundo Saad (2003), um dos pré-condicionadores mais comuns para matrizes não-simétricas é a fatoração LU incompleta (ILU), que corresponde à fatorização Cholesky incompleta para matrizes simétricas.

No artigo de Iwamura et al. (2003), foi apresentado um robusto e eficiente algoritmo de resolução de sistemas de equações lineares, a partir da discretização por Elementos Finitos de uma equação diferencial parcial elíptica de segunda ordem em malhas não estruturadas. Neste caso foi usado o método *Multigrid* Algébrico e Gradiente Conjugado, o que permite aplicar este *solver* não só para sistemas grandes, mas também para sistemas pequenos e médios de equações lineares e também para sistemas que requerem aproximações de baixa precisão. Os resultados mostraram-se promissores, pois o algoritmo desenvolvido pode resolver eficientemente problemas de qualquer tamanho, pois são realizadas aproximações simples da matriz original, o que fornecem ciclos de iterações rápidos, acelerando a convergência do método iterativo.

Um método de resolução rápida chamado método Gradiente Conjugado pré-condicionado com *Multigrid* é proposto por Hafner e Konke, (2006) para a análise mecânica de materiais heterogêneos na mesoescala. Um ciclo de *Multigrid* modificado proposto mostrou bons resultados relativos à taxa de convergência, tanto quando aplicado como *solver* autônomo quanto como um pré-condicionador.

Pflaum (2008) descreve uma nova abordagem para combinar o método Gradiente Conjugado e o método *Multigrid*. Esta abordagem constrói simultaneamente novas direções de correção conjugadas com base em gradientes restritos. Tal algoritmo pode ser aplicado para acelerar um algoritmo *Multigrid* com convergência lenta. Apresentam-se resultados numéricos para a equação de Poisson e uma equação do tipo Stokes.

Debreu et al. (2015) investigam o uso de métodos *Multigrid* para resolver uma equação de advecção linear, onde foi demonstrado que os erros numéricos introduzidos pela discretização podem alterar o sucesso do método *Multigrid*. A visão das iterações do método *Multigrid* como pré-condicionador para um método de subespaço de Krylov leva a um algoritmo mais robusto. É proposta uma ponderação dependente da escala do pré-condicionador *Multigrid* e o pré-condicionador baseado na matriz de covariância de erro de fundo usual, o que trouxe melhorias significativas.

No trabalho de Wang e Nie (2017), o método Gradiente Conjugado pré-condicionado com *Multigrid* é proposto para os sistemas algébricos resultantes de dois elementos híbridos combinados de hexaedros de 8 nós com alto desempenho para o problema da elasticidade linear. São apresentados resultados numéricos que demonstram a convergência e a eficácia do método.



## 2.3 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES E MÉTODOS DE PROJEÇÃO

Para conhecer o estado de um fluido, deve-se determinar o valor das variáveis que o identificam, ao longo do tempo, em cada ponto do espaço ocupado pelo fluido. As variáveis que identificam o estado de um fluido incompressível e isotérmico são: a velocidade em cada ponto (grandeza vetorial) e a pressão (que em cada ponto é uma grandeza escalar). Essas variáveis são agrupadas em equações, que passaram a ser conhecidas como, as equações de Navier-Stokes. Detalhes sobre as equações de Navier-Stokes e outras propriedades dos fluidos podem ser encontrados em Batchelor (1970), Peyret e Taylor (1983), Panton (1984), Fletcher (1992), Maliska (2004) e Ferziger e Peric (2001).

Para superar a dependência entre a pressão e a velocidade nas equações de Navier-Stokes, diferentes esquemas numéricos têm sido desenvolvidos, destacando-se os métodos de Projeção (CHORIN, 1968), que dividem a solução do problema em três partes, resolvidas em cada passo de tempo independente dos processos iterativos das outras variáveis. Estes métodos podem ser divididos em três classes: esquemas de correção na pressão (*pressure-correction schemes*), esquemas de correção na velocidade (*velocity-correction schemes*) e de separação consistente (*consistent splitting schemes*).

Chorin (1968) e Temam (1969), propuseram o primeiro deles, considerado o mais simples dos três existentes. Utiliza o método de Euler na discretização temporal, onde cria-se uma velocidade auxiliar (também conhecida como temporária ou ainda preditiva) com a qual se estima as velocidades no passo de tempo atual a partir do valor das velocidades no passo anterior ignorando a pressão, compondo assim, a primeira etapa do algoritmo. Na segunda etapa é calculada a pressão a partir da velocidade auxiliar. Nesta etapa, onde é realizada a Projeção, são aplicadas as condições de incompressibilidade (no cálculo da pressão). Com o valor da pressão é realizada a correção da velocidade no tempo atual. O fato de que em cada uma das etapas do algoritmo ser resolvidas equações elípticas para a pressão e velocidades de forma desacoplada, isto representa o aspecto mais atrativo do método. No entanto, a acurácia do método é prejudicada devido à imposição de condições de contorno de Neumann artificiais (não necessariamente obedecidas pelo fluido real) sobre a pressão.

Goda (1979) observou que adicionando o valor do gradiente de pressão de uma iteração anterior à primeira etapa do algoritmo de Chorin (1968) (que ignora a pressão na primeira etapa), a acurácia do algoritmo aumenta. Esta observação foi utilizada por Van Kan (1986) na formulação de um método de correção na pressão de segunda ordem. O método em questão é conhecido como “esquema de correção incremental na pressão na forma padrão”.

Em Bell et al. (1989) encontra-se um método de Projeção bastante conhecido, similar ao de Van Kan (1986). O esquema de Bell et al. (1989) tem sido bastante utilizado na literatura e pode ser encontrado em diversas variantes, normalmente utilizadas para resolver problemas mais complexos, tais como escoamentos reativos discutidos em Almgren et al. (1993, 1996) e escoamentos multifásicos detalhados em Villar (2007).

Em Kim e Moin (1985) encontra-se um método de Projeção que, como o método de Chorin (1968), ignora a pressão na primeira etapa do algoritmo e não realiza a correção da pressão na segunda etapa, no entanto apresenta taxas de convergência similares às obtidas pelo esquema de correção incremental da pressão na forma rotacional, ou seja, o esquema de Timmermans et al. (1996).

Assim como no caso do método de Chorin (1968), os métodos de Goda (1979) e Van Kan (1986) também possuem sua acurácia afetada devido às condições de contorno impostas à pressão. Na tentativa de superar esta dificuldade Timmermans et al. (1996) propuseram adicionar o divergente das velocidades auxiliares na segunda etapa do algoritmo de Van Kan (1986). Esta pequena modificação conduz à melhoria na taxa de convergência da pressão, principalmente porque impõe, condições de contorno consistentes. Neste algoritmo as condições de contorno da pressão devem satisfazer o rotacional das velocidades nos contornos, devido a esta propriedade o método é chamado de “correção incremental na pressão na forma rotacional”.

Pelo fato de ignorar a pressão na primeira etapa e não realizar a correção da mesma na segunda etapa, Brown et al. (2001) referem-se ao esquema de Kim e Moin (1985) como um método de Projeção independente da pressão (*pressure-free projection method*). Guermond et al. (2006) através de mudanças de variáveis apropriadas provam que o esquema de Kim e Moin (1985) é equivalente ao esquema de Timmermans et al. (1996), explicando assim as taxas de convergência observadas.

Até o momento foram tratados os métodos de Projeção com correção na pressão. Em Orszag et al. (1986) e Karniadakis et al. (1991) é apresentado uma nova classe de métodos de Projeção conhecidos como esquemas de correção na velocidade. Estes métodos, basicamente, invertem as etapas dos métodos com correção na pressão. De forma similar ao caso da correção na pressão, os métodos de correção na velocidade também possuem uma versão com correção incremental na forma padrão e, introduzida por Guermond e Shen (2003), na forma rotacional.

No trabalho de Trales, (2001), são resolvidas as equações de Navier-Stokes bidimensionais pelo método dos Elementos Finitos com esquemas de Projeção e *Multigrid*. A conjunção dos métodos mostrou-se bastante robusta e precisa, com custo computacional relativamente baixo.

Guermond et al. (2006) fazem uma ampla revisão dos métodos de Projeção disponíveis na literatura. Apresentam os principais métodos de Projeção, as taxas de convergência e a relação destes com outros métodos de Projeção.

Kadioglu et al. (2008) apresentaram um método numérico de quarta ordem para escoamentos compressíveis para dinâmica de gases com número de Mach tendendo a zero. O método de Projeção proposto consiste na extensão do caso de escoamentos incompressíveis para o caso de escoamentos compressíveis (OSELEDETS, 1989). A discretização espacial de quarta ordem é feita utilizando o método dos Volumes Finitos e a discretização temporal é baseada no método das correções espectrais adiadas.

Guermond e Salgado (2009) apresentaram um novo método de separação consistente de segunda ordem para resolução das equações de Navier-Stokes incompressíveis com densidade variável. O método tem custo computacional reduzido ao resolver apenas uma equação por passo de tempo. A estabilidade do método é provada analiticamente e o desempenho do método é testado.

Astorino e Grandmont (2010) apresentaram a análise de convergência de um método de Projeção com discretização espacial pelo método dos Elementos Finitos e discretização temporal semi-implícita. Apresentaram analiticamente uma estimativa do erro associado à discretização do tempo e apresentaram resultados numéricos para corroborar a solução analítica.

Almgren et al. (2013) resolveram as equações de Navier-Stokes utilizando um método de quarta ordem tanto na discretização espacial quanto temporal. Similar ao trabalho de Kadioglu et al. (2008), o método de Projeção proposto consiste na extensão do caso de escoamentos incompressíveis para o caso de escoamentos compressíveis (OSELEDETS, 1989). A discretização espacial de quarta ordem é feita utilizando o método dos Volumes Finitos e a discretização temporal é baseada no método das correções espectrais adiadas. O trabalho avaliou a relação entre o método apresentado e a resolução de malha necessária para adequadamente resolver problemas de escoamento turbulento. Compararam o método de quarta ordem apresentado com versões de segunda ordem e demonstraram que para determinado número de Reynolds a resolução de malha necessária para resolver adequadamente escoamentos turbulentos é muito menor que a necessária para métodos de segunda ordem.

Zhang (2014) resolveu as equações de Navier-Stokes incompressíveis utilizando um método de Projeção de quarta ordem de acurácia tanto na discretização espacial quanto temporal. Empregou Volumes Finitos para a discretização espacial e o método de Runge-Kutta semi-implícito para a discretização temporal. Utiliza malhas estruturadas com refinamento

adaptativo. A condição de divergente nulo é satisfeita empregando um operador de Projeção aproximado em que o autor apresentou detalhada análise de estabilidade e acurácia.

No trabalho de Reis et al. (2016) é apresentado um novo tipo de método de Projeção que possui quarta ordem de convergência espacial e segunda ordem temporal para a velocidade e pressão. Esse método é particularmente interessante, pois não requer o uso de aproximações para a pressão (na equação do momento) e nem condições de contorno complicadas para a velocidade intermediária. Além disso, trata-se de um método de Projeção exata, onde a condição de incompressibilidade é satisfeita exatamente (a menos da precisão de máquina) a cada passo de tempo.

O trabalho de Neundorf et al. (2016), resolveu o problema de escoamento laminar bidimensional de um fluido incompressível em regime transiente, governado pelas equações de Navier-Stokes, utilizando um método de Projeção paralelizado no tempo e no espaço. Para tanto, utilizou-se o método dos Volumes Finitos (MVF), com esquema de aproximação de segunda ordem (CDS), além de um método de Projeção com correção incremental na pressão. O *solver* utilizado foi o método de Gauss-Seidel *red-black*. Para a obtenção da solução, foi empregado o método *Multigrid* geométrico, com ciclo V, esquema de correção CS, restrição por ponderação completa, prolongação utilizando interpolação bilinear e número máximo de níveis para os casos estudados.

No trabalho citado são apresentadas novas formulações dos métodos de projeção paralelizados no tempo e no espaço. Nesta nova formulação as equações de Navier-Stokes são aproximadas em todos os passos de tempo em paralelo. A paralelização no tempo foi realizada através da reformulação dos métodos de projeção e a paralelização do espaço foi realizada aplicando-se uma metodologia de particionamento do domínio. Com a paralelização do método de Projeção no tempo e no espaço foi possível reduzir em até 12 vezes, utilizando 16 processadores, o tempo de CPU necessário para se obter as soluções das equações de Navier-Stokes.

O interessante de se perceber é que tal trabalho não se preocupou com a eficiência da resolução dos sistemas de equações envolvidos em cada etapa dos métodos de Projeção utilizados. No presente trabalho, a busca por soluções desses sistemas de maneira mais eficiente é o principal foco e contribuição, o que aliado ao estudo realizado por Neunforf et al, (2016), pode apresentar resultados ainda mais significativos em eventuais pesquisas futuras. Vale ressaltar que os resultados obtidos neste trabalho foram comparados com os resultados sequenciais, e não paralelas, dos algoritmos do estudo de Neundorf et al. (2016) para efeitos de comparação e validação das metodologias aqui estudadas.

### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo é apresentada uma fundamentação teórica sobre os métodos iterativos básicos, métodos de Subespaços de Krylov, pré-condicionamento de matrizes e princípios básicos do método *Multigrid*.

#### 3.1 MÉTODOS ITERATIVOS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Segundo Cunha (2003), os métodos numéricos utilizados para a obtenção das soluções de sistemas lineares podem ser divididos em dois grupos: os métodos diretos e os métodos iterativos. O uso dos métodos diretos apresenta a vantagem de fornecer, após um número finito de passos, a solução do sistema, não dependendo de critérios de convergência. Os métodos diretos mais utilizados (FORTUNA, 2000) são: eliminação de Gauss, fatoração LU, entre outros. O uso de métodos diretos pode ser inviável quando o sistema de equações é muito grande, esparso ou mal condicionado (BURDEN e FAIRES, 2010).

Os métodos iterativos produzem uma sequência de vetores a partir de uma aproximação inicial. Sob certas condições, esta sequência converge para a solução exata, caso ela exista. Segundo Fortuna (2000), os métodos iterativos apresentam a vantagem de serem aplicáveis quando o sistema de equações é não linear. De acordo com Burden e Faires (2010), eles são vantajosos quando se tem problemas com muitas incógnitas, além de aproveitarem a esparsidade da matriz de coeficientes. Alguns exemplos de métodos iterativos: Jacobi, Gauss-Seidel (BURDEN e FAIRES, 2010), MSI (*Modified Strongly Implicit Method*) (SCHNEIDER e ZEDAN, 1981), ADI (*Alternate Direction Implicit Method*) (FERZIGER e PERIC, 2002), entre outros, sendo que neste trabalho optou-se pelo uso de métodos iterativos.

##### 3.1.1 Método de Gauss-Seidel

A discretização das equações diferenciais parciais a serem resolvidas faz surgir o seguinte sistema de equações algébricas conforme Eq. (1.1), onde  $u$  e  $f \in \mathbb{R}^n$ .

Seja a matriz  $A$  dividida na forma

$$A = M - N, \quad (3.1)$$

sendo  $M$ , não-singular, denominada matriz de pré-condicionamento ou pré-condicionador.

Para solução da Eq. (1.1), tem-se o seguinte método que é chamado de método iterativo básico estacionário:

$$Mu^{(k+1)} = Nu^{(k)} + f, \quad (3.2)$$

onde o sobrescrito de  $u$  é a representação das iterações.

Isso equivale a:

$$u^{(k+1)} = M^{-1}Nu^{(k)} + M^{-1}f. \quad (3.3)$$

O método de Gauss-Seidel utiliza para o cálculo da componente  $u^{(k+1)}$  o valor mais recente de  $u^{(k)}$ . Para isso,  $M = L + D$ , sendo  $L$  a parte triangular inferior de  $A$  e  $D$  a diagonal de  $A$ . Além disso,  $N = -U$ , sendo  $U$  a parte triangular superior de  $A$ .

A matriz de iteração associada é

$$G_{GS} = I - M^{-1}A = I - (L + D)^{-1}A. \quad (3.4)$$

O processo iterativo do método de Gauss-Seidel é definido por:

$$u^{(k+1)} = G_{GS}u^{(k)} + (L + D)^{-1}f. \quad (3.5)$$

Se as entradas diagonais de  $A$  são diferentes de zero, pode-se isolar em cada equação o correspondente valor desconhecido, e uma vez que uma estimativa inicial  $u^{(0)}$  é escolhida,  $u^{(k+1)}$  é calculado, dado de acordo com a Eq. (3.5) dos métodos estacionários por:

$$u_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}u_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}u_j^{(k)} \right], \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.6)$$

ou seja, no passo  $k + 1$ , os valores disponíveis de  $u^{(k+1)}$  estão sendo usados para atualizar a solução.

A Eq. (3.6) pode ser reescrita, de acordo com o ordenamento lexicográfico (Fig. 3.1), ordenação que será utilizada neste trabalho.

	21	22	23	24	25
	16	17	18	19	20
	11	12	13	14	15
	6	7	8	9	10
$y$	1	2	3	4	5
	$x$				

Figura 3.1: Ordenação para Gauss-Seidel lexicográfico.

### 3.1.2 Decomposição LU incompleta (ILU)

Para resolver a Eq. (1.1) diretamente, pode-se usar a decomposição LU convencional, na qual a matriz  $A$  é escrita na forma  $A = LU$ , onde  $L$  e  $U$  são, respectivamente, matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente.

Sendo  $A$  uma matriz esparsa, comum na discretização de problemas de CFD,  $L$  e  $U$  também serão esparsas, porém, podem surgir termos não nulos nessas duas matrizes nas posições correspondentes a termos nulos em  $A$ , como pode ser visto, por exemplo, nas estruturas apresentadas na Fig. 3.2, o que torna este método ineficiente para resolver problemas de grande porte como o tratado neste trabalho.

$$A = \begin{bmatrix} \diagdown & & & & 0 \\ & \diagdown & & & \\ & & \diagdown & & \\ & & & \diagdown & \\ 0 & & & & \diagdown \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} \diagdown & & & & \\ & \diagdown & & & \\ & & \diagdown & & \\ & & & \diagdown & \\ 0 & & & & \diagdown \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} \diagdown & & & & 0 \\ & \diagdown & & & \\ & & \diagdown & & \\ & & & \diagdown & \\ & 0 & & & \diagdown \end{bmatrix}$$

Figura 3.2: Estruturas das matrizes  $A$ ,  $L$  e  $U$ .

A decomposição LU incompleta (ILU) (WESSELING, 2004; TROTTENBERG et al., 2001; SAAD, 2003) consiste em preservar a esparsidade da matriz  $A$  nas matrizes  $L$  e  $U$ , ou permitir a inserção de poucas diagonais adicionais a elas, tratando-se, portanto, de uma adaptação da decomposição LU, tornando este método, que era direto, em um método iterativo.

Nele, a decomposição da matriz  $A$  se dá na forma  $A = M - N$ , como na Eq. (3.1) com  $M$  esparsa e dada por

$$M = LU \quad (3.7)$$

e  $N$  a partir de agora chamada de  $R$  representando a matriz resíduo ou erro da decomposição.

Uma alternativa de fatoração  $M$  é

$$M = LD^{-1}U. \quad (3.8)$$

Com a fatoração incompleta por pontos,  $D$  é escolhida como uma matriz diagonal, e  $\text{diag}(L) = \text{diag}(U) = D$ , de modo que as Eqs. (3.7) e (3.8) serão equivalentes, onde  $L$ ,  $D$  e  $U$  são determinados como se segue.

Quando a discretização do modelo matemático resulta em uma matriz pentadiagonal, a decomposição ILU 5 pontos deixa as matrizes  $L$  e  $U$  com a mesma esparsidade da matriz  $A$ . Este caso é chamado de ILU(0) por não permitir nenhum preenchimento nas matrizes  $L$  e  $U$ , sendo que isso só é possível pelo fato de se ter também a matriz resíduo  $R$ , conforme a representação que aparece na Fig. 3.2:

$$\begin{bmatrix} \diagup & & & & & & \\ & \diagup & & & & & \\ & & \diagup & & & & \\ & & & \diagup & & & \\ & & & & \diagup & & \\ & & & & & \diagup & \\ & & & & & & \diagup \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \diagup & & & & & & \\ & \diagup & & & & & \\ & & \diagup & & & & \\ & & & \diagup & & & \\ & & & & \diagup & & \\ & & & & & \diagup & \\ & & & & & & \diagup \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \diagup & & & & & & \\ & \diagup & & & & & \\ & & \diagup & & & & \\ & & & \diagup & & & \\ & & & & \diagup & & \\ & & & & & \diagup & \\ & & & & & & \diagup \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \diagup & & & & & & \\ & \diagup & & & & & \\ & & \diagup & & & & \\ & & & \diagup & & & \\ & & & & \diagup & & \\ & & & & & \diagup & \\ & & & & & & \diagup \end{bmatrix}$$

**Figura 3.3: Representação genérica das matrizes  $A = LU - R$  no método ILU de 5 pontos.**

É possível observar, na Fig. 3.3, que as matrizes  $L$  e  $U$  mantêm a mesma esparsidade da matriz  $A$ . É possível observar também que a matriz  $R$  dos resíduos contém duas diagonais adicionais (linhas não-tracejadas). Neste caso, as “linhas tracejadas” em  $R$  representam as posições das diagonais não nulas de  $A$ .

É possível permitir preenchimentos adicionais às matrizes  $L$  e  $U$  gerando assim as decomposições ILU(1), ILU(2), e assim por diante (SAAD, 2003). Nesta tese vamos trabalhar apenas com a decomposição ILU(0), como ilustrada na Fig. 3.3.



Para o caso apresentado na Eq. (1.1), obtido pela discretização de uma equação diferencial, o sistema pode ser representado por uma matriz pentadiagonal com a estrutura apresentada abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots 0 \cdots & a_{1,1+N_x} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{k,k-N_x} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{k,k+N_x} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{N-1,N} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{N,N-N_x} & \cdots 0 \cdots & a_{N,N-1} & a_{N,N} \end{bmatrix}.$$

Para abreviar a notação matricial, a seguinte notação para os termos não nulos é introduzida:

$$a_k = a_{k,k-N_x}, c_k = a_{k,k-1}, d_k = a_{k,k}, q_k = a_{k,k+1} \text{ e } g_k = a_{k,k+N_x}. \quad (3.9)$$

Para ilustrar um exemplo dos formatos adquiridos pelas matrizes  $A$ ,  $L$ ,  $D^{-1}$  e  $U$ , a seguir são apresentadas tais representações para uma discretização de cinco pontos.

Começando pela matriz  $A$ , que pode ser representada da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & q_1 & \cdots 0 \cdots & g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{N_x+1} & & \ddots & \ddots & \ddots & & g_{N-N_x} \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & q_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_N & \cdots 0 \cdots & c_N & d_N \end{bmatrix}.$$

Seja os elementos não nulos de  $L$ ,  $D$  e  $U$  dados por  $\alpha_k$ ,  $\gamma_k$ ,  $\delta_k$ ,  $\mu_k$  e  $\eta_k$ ; as posições destes elementos são idênticos aos de  $a_k, \dots, g_k$ , respectivamente.

A estrutura da matriz  $L$  é dada por:

$$L = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \gamma_2 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \alpha_{N_x+1} & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_N & \cdots 0 \cdots & \gamma_N & \delta_N \end{bmatrix}.$$

A estrutura da matriz  $D^{-1}$  é dada por:

$$D = \begin{bmatrix} \delta_1^{-1} & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & \delta_N^{-1} \end{bmatrix}.$$

A estrutura da matriz  $U$  é dada por:

$$U = \begin{bmatrix} \delta_1 & \mu_1 & \dots & 0 & \dots & \eta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & & & & & \eta_{N-N_x} \\ & & & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \mu_{N-1} \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & \delta_N \end{bmatrix}.$$

A grosso modo, na decomposição ILU de 5 pontos, para o cálculo dos elementos da matriz  $L$  ( $l_{ij}$ ) e dos elementos da matriz  $U$  ( $u_{ij}$ ), procede-se como na decomposição LU convencional, mas em cada passo, todos os elementos de  $L$  e de  $U$  correspondente a uma

diagonal nula da matriz  $A$  são substituídos por zero. Os termos não nulos, que foram zerados em  $L$  e  $U$ , são alocados em suas respectivas posições na matriz  $R$  dos resíduos.

A partir das correspondências entre os elementos e lembrando que  $A = M - R$  com  $M = LD^{-1}U$ , ou seja,  $A = LD^{-1}U - R$ , então, pode-se escrever

$$LD^{-1}U = \alpha + \gamma + \delta + \mu + \eta + \alpha\delta^{-1}\mu + \alpha\delta^{-1}\eta + \gamma\delta^{-1}\mu + \gamma\delta^{-1}\eta \quad (3.10)$$

Segue que

$$\alpha = a, \gamma = c, \mu = q, \eta = g \text{ e } \delta + \alpha\delta^{-1}\eta + \gamma\delta^{-1}\mu = d \quad (3.11)$$

A matriz resíduo  $R$  é dada por

$$R = \alpha\delta^{-1}\mu + \gamma\delta^{-1}\eta \quad (3.12)$$

As únicas entradas não nulas de  $R$  são

$$\alpha_k \delta_{k-N_x}^{-1} \mu_{k-N_x} = n_{k,k-N_x+1} \text{ e } \gamma_k \delta_{k-1}^{-1} \eta_{k-1} = n_{k,k+N_x-1} \quad (3.13)$$

De (3.11) a seguinte resursão é obtida:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= a_k, \\ \gamma_k &= c_k, \\ \mu_k &= q_k, \\ \eta_k &= g_k \text{ e} \\ \delta_k &= d_k - \alpha_k \delta_{k-1}^{-1} \eta_{k-1} - \gamma_k \delta_{k-1}^{-1} \mu_{k-1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

A partir da Eq. (3.14) segue-se que  $L$ ,  $D$  e  $U$  pode substituir  $A$ . O único armazenamento adicional necessário é para  $R$ . Ou, se preferir, elementos de  $R$  podem ser computados quando necessário.

Um algoritmo geral para ILU, pode ser obtido aplicando-se Eliminação Gaussiana (SAAD, 2003) e dispondo-se alguns elementos em posições pré-determinadas, conforme descrito anteriormente.

Assim, dada a fatoração LU incompleta, resolve-se  $Au = f$  em um processo iterativo composto pelas seguintes etapas:

$$Au = f \Leftrightarrow (LU - R)u = f \Leftrightarrow LUu - Ru = f. \quad (3.15)$$

Criando-se o processo iterativo, tem-se:

$$LUu^{(k+1)} = f + Ru^{(k)}. \quad (3.16)$$

Fazendo  $R = LU - A$  e substituindo na Eq. (3.16), fica:

$$LUu^{(k+1)} = f + LUu^{(k)} - Au^{(k)} \Leftrightarrow LUu^{(k+1)} - LUu^{(k)} = f - Au^{(k)}, \quad (3.17)$$

resultando em:

$$LU\Delta^{(k)} = r^{(k)}, \quad (3.18)$$

onde  $\Delta^{(k)} = u^{(k+1)} - u^{(k)}$  é denominada correção da solução na iteração  $(k + 1)$  e  $r^{(k)} = f - Au^{(k)}$  é o resíduo na iteração  $k$ .

Portanto, resolve-se dois sistemas lineares triangulares:

- (1)  $Lz^{(k)} = r^{(k)}$  para obter  $z^{(k)}$ ;
- (2)  $U\Delta^{(k)} = z^{(k)}$  para obter  $\Delta^{(k)}$ .

Assim, a solução na iteração  $(k + 1)$  é tal que  $u^{(k+1)} = u^{(k)} + \Delta^{(k)}$ .

### 3.1.3 Método Gradiente Conjugado pré-condicionado

Além dos métodos iterativos clássicos, existem outras metodologias usadas para se abordar a solução de sistemas lineares, que são os métodos de Subespaços Krylov (SAAD, 2003).

Dado o sistema linear na forma expressa pela Eq. (1.1), o subespaço de Krylov  $k$ -dimensional associado à matriz  $A$  pode ser representado da forma como segue:

$$K^k(A, u) = \{u, Au, A^2u, \dots, A^{k-1}u\} \quad (3.19)$$

para algum vetor  $u \in \mathbb{R}^n$ .

Os métodos iterativos baseados em subespaços de Krylov são métodos que consistem em obter, dada uma aproximação inicial  $u^{(0)}$ , numa iteração arbitrária  $k$ , a solução  $u^{(k)}$  no subespaço afim  $u^{(0)} + K^k(A, r^{(0)})$ , com  $r^{(0)} = f - Au^{(0)}$  de dimensão  $k$ , em adição com as condições de Petrov-Galerking (SAAD, 2003) dadas por

$$r^{(k)} = f - Au^{(k)} \perp L^{(k)}, \quad (3.20)$$

em que  $L^{(k)}$  é um subespaço de restrições de dimensão  $k$ , convenientemente escolhido. O subespaço de Krylov  $K^k(A, r^{(0)}) = \{r^{(0)}, Ar^{(0)}, \dots, A^{k-1}r^{(0)}\}$  será designado simplesmente por  $K^k$ .

Os vários tipos de métodos de subespaço de Krylov fazem referência às diferentes maneiras de escolher o subespaço  $L^{(k)}$  e de que forma é feito o pré-condicionamento do sistema linear.

O método Gradiente Conjugado é uma das técnicas iterativas mais conhecidas para resolução de sistemas lineares com matrizes simétricas definidas positivas esparsas e que faz parte desta família de métodos. O método é a realização de uma técnica de projeção ortogonal no subespaço de Krylov  $K^k(A, r^{(0)})$ . O fato de  $A$  ser simétrica, algumas simplificações podem ser realizadas.

A seguir aparecem algumas propriedades de matrizes simétricas:

Propriedade 1: Todos os autovalores de uma matriz simétrica são reais.

Propriedade 2: Todos os autovalores de matriz simétrica definida positiva ( $u^T Au > 0, \forall u \neq 0$ ) são positivos.

Métodos de Descida baseiam-se em obter uma solução  $u$  de um sistema do tipo dado pela Eq. (1.1) pela propriedade da minimização de uma norma apropriada do erro. A partir de uma estimativa inicial  $u^{(0)}$ , esses métodos determinam a solução do problema pela diminuição do erro.

Seja a norma vetorial dada por  $\|u\|_2 = \langle u, Su \rangle$ , onde  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz simétrica definida positiva. Considerando a equação residual  $Ae^{(k)} = r^{(k)}$ , pode-se deduzir (SAAD, 2003) que

$$\|e^{(k)}\|_2 = \langle e^{(k)}, Se^{(k)} \rangle = \langle r^{(k)}, Rr^{(k)} \rangle, \quad (3.21)$$

onde  $R = A^{-T}SA^{-1}$ , o que significa dizer que minimizar o erro equivale a minimizar o resíduo na mesma norma.

Nos métodos de Descida parte-se de uma estimativa inicial  $u^{(0)}$  da solução e gera-se uma sucessão de vetores  $u^{(1)}, \dots, u^{(k)}, \dots$ , caminhando sucessivamente ao longo de uma direção de diminuição do erro  $\|e^{(k)}\|_2$ , de modo que essa sucessão de vetores convirja para  $u$ .

Uma das formas de se escolher a melhor direção em cada ponto  $u^{(k)}$ , seria escolher a direção de  $p^{(k)}$  que tem o maior descida, ou seja, aquela que está alinhada com a direção do gradiente da função  $\|e^{(k)}\|_2$ , porém em sentido oposto. Por isso estes métodos são chamados de métodos Gradientes.

Desta forma, a expressão iterativa dos métodos Gradientes é dada por (SAAD, 2003):

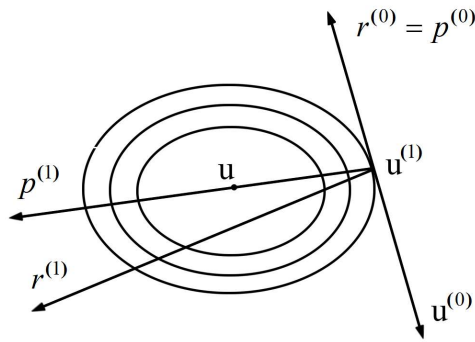
$$u^{(k+1)} = G_k u^{(k)} + c_k, \quad (3.22)$$

em que  $G_k = I - \omega_k S$ ,  $c_k = \omega_k SA^{-1}f$ , sendo  $\omega_k$  o fator de relaxamento.

O método Gradiente Conjugado (SAAD, 2003) é um método iterativo descendente, aplicado aos casos onde a matriz de iteração  $A$  é simétrica positiva definida. Este método prevê uma escolha mais criteriosa das direções de descida  $p^{(k)}$ .

Para exemplificar, considere um problema bidimensional. As linhas  $\|e^{(k)}\|_2 = \|r^{(k)}\|_2 =$  constante, são elipses concêntricas com centro em  $u$ , conforme ilustrado na Fig. 3.4.

Supondo-se dispor de uma estimativa inicial  $u^{(0)}$ , de acordo com o método Gradiente, parte-se deste ponto e pesquisa-se o mínimo de  $\|e^{(k)}\|_2$ , ao longo da direção  $r^{(0)}$ , obtendo  $u^{(1)}$ . Observando a Fig. 3.4, verifica-se que a melhor progressão de  $u^{(1)}$  não seria a direção mais inclinada, mas sim uma direção  $p^{(1)}$  que apontasse para o centro da elipse (conjugacidade).



**Figura 3.4. Representação gráfica do método Gradiente Conjugado.**

De fato, o novo ponto minimizador  $u^{(2)}$  coincidiria com a solução exata de  $u$ , e assim o processo iterativo terminaria com apenas duas iterações. Pode-se, então, desta forma, escolher a direção  $p^{(1)}$  como:

$$p^{(1)} = u - u^{(1)}. \quad (3.23)$$

Para atender a ortogonalidade dos resíduos sucessivos, tem-se

$$0 = \langle r^{(1)}, r^{(0)} \rangle = \langle r^{(1)}, p^{(0)} \rangle = \langle f - Au^{(1)}, p^{(0)} \rangle = \langle A(u - u^{(1)}), p^{(0)} \rangle, \quad (3.24)$$

de tal modo que

$$\langle p^{(1)}, Ap^{(0)} \rangle = 0. \quad (3.25)$$

As direções buscadas são

$$p^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta_k p_k, \quad (3.26)$$

onde  $\beta_k$  é dado por

$$\beta_k = \frac{\langle r^{(k+1)}, r^{(k+1)} \rangle}{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}. \quad (3.27)$$

As iterações do método Gradiente Conjugado satisfazem a seguinte estimativa de erro:



$$\|e^{(k)}\| \leq \left( \frac{(\text{cond}_2(A))^{\frac{1}{2}} - 1}{(\text{cond}_2(A))^{\frac{1}{2}} + 1} \right) \|e^{(0)}\|, \quad (3.28)$$

onde  $\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$ .

Com isso, pode-se perceber que o método Gradiente Conjugado, teoricamente, calcula a solução exata em  $N$  iterações ( $N$  é a dimensão espacial do problema), o que na prática não se verifica devido à utilização deste método em aritmética de precisão finita e a introdução de erros de arredondamento que destroem a exata conjugacidade das direções  $p^{(k)}$  e a exata ortogonalidade dos resíduos  $r^{(k)}$ . Desta forma, este método que é a princípio, um método direto, adquire uma forma tipicamente iterativa. Neste caso, é recomendável efetuar-se as iterações necessárias que satisfaçam a critérios de convergência adequados.

Saad (2003) propõe um algoritmo para o método descrito anteriormente, porém, neste trabalho, buscou-se uma forma de acelerá-lo, conforme descrito a seguir:

Uma forma de tornar este método iterativo mais rápido consiste em transformar o sistema  $Au = f$  em um sistema equivalente, onde a matriz tenha um número de condicionamento mais favorável. Para ilustrar, pode-se utilizar o método Gradiente Conjugado, onde de acordo com a expressão dada pela Eq. (3.28), sabe-se o comportamento da estimativa do erro na iteração  $k$ . Logo, se for possível diminuir  $\text{cond}_2(A)$ , conseqüentemente o erro  $\|e^{(0)}\|$  também irá diminuir, proporcionando uma rápida convergência.

Esta transformação é conseguida pré-multiplicando e pós-multiplicando a matriz  $A$  por duas matrizes  $P$  e  $Q$  inversíveis do seguinte modo:

$$(PAQ)(Q)^{-1}u = Pf. \quad (3.29)$$

O sistema agora corresponde, portanto a  $\bar{A}\bar{u} = \bar{f}$ , com  $\bar{A} = PAQ$ ,  $\bar{u} = Q^{-1}u$  e  $\bar{f} = Pf$ , sendo que as matrizes  $P$  e  $Q$  devem ser escolhidas de modo a proporcionar à matriz  $\bar{A}$  melhores propriedades de convergência em relação à matriz original  $A$ . Este procedimento é conhecido como pré-condicionamento do sistema de equações original, sendo  $P$  e  $Q$  conhecidas pelo nome de matrizes de pré-condicionamento. No caso onde  $Q = I$ , tem-se pré-condicionamento à esquerda e se  $P = I$ , tem-se pré-condicionamento à direita.

Por razões de custo computacional, é conveniente que o algoritmo de pré-condicionamento evite a formação explícita de  $\bar{A}$ , e trabalhe apenas com a matriz original  $A$ .

Considerando que no método Gradiente Conjugado a matriz transformada deve continuar sendo simétrica definida positiva, o pré-condicionamento também deverá preservar esta propriedade. De fato, pode-se obter isso fazendo  $P = S$  e  $Q = P^T = S^T$  e desta forma, conclui-se que  $\bar{A}\bar{u} = \bar{f}$ , com  $\bar{A} = SAS^T$ ,  $\bar{u} = S^{-T}u$  e  $\bar{f} = Sf$ . Assim, verifica-se que

$$\bar{p}^{(0)} = \bar{r}^{(0)} = \bar{f} - \bar{A}\bar{u}^{(0)} = Sr^{(0)}. \quad (3.30)$$

Por outro lado, escolhendo-se  $p^{(0)} = S^T \bar{p}^{(0)} = S^T \bar{r}^{(0)} = S^T Sr^{(0)}$ , tem-se que

$$\langle \bar{p}^{(0)}, \bar{A}\bar{p}^{(0)} \rangle = \langle p^{(0)}, Ap^{(0)} \rangle, \quad (3.31)$$

sendo válida também a relação

$$\langle \bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)} \rangle = \langle \bar{r}^{(0)}, r^{(0)} \rangle, \quad (3.32)$$

com

$$W\bar{r}^{(0)} = r^{(0)} \quad (3.33)$$

e

$$W = (S^T S)^{-1}. \quad (3.34)$$

A partir de então tem-se que:

$$\omega_0 = \langle \bar{r}^{(0)}, r^{(0)} \rangle / \langle p^{(0)}, Ap^{(0)} \rangle, \quad (3.35)$$

$$u^{(1)} = u^{(0)} + \omega_0 p^{(0)}, \quad (3.36)$$

$$r^{(1)} = r^{(0)} - \omega_0 Ap^{(0)}, \quad (3.37)$$

$$\beta_0 = \frac{\langle \tilde{r}^{(1)}, r^{(1)} \rangle}{\langle \tilde{r}^{(0)}, r^{(0)} \rangle} \quad (3.38)$$

e

$$p^{(1)} = r^{(1)} + \beta_0 p^{(0)}, \quad (3.39)$$

mantendo-se essas expressões para as iterações seguintes.

O Algoritmo 3.1 apresenta o método Gradiente Conjugado pré-condicionado, onde nota-se que a cada iteração é necessário resolver o sistema auxiliar:

$$W\tilde{r}^{(j+1)} = r^{(j)}, \quad (3.40)$$

e deseja-se que sua resolução não seja muito trabalhosa sendo que as situações extremas são: considerar  $W = I$ , onde recupera-se o método Gradiente Conjugado, ou então, considerar  $W = A$ , obtendo a solução de forma direta, porém, com o custo computacional de ter que inverter a matriz  $A$ . Em geral, procura-se ficar entre estes dois extremos.

---

### **Algoritmo 3.1. Método Gradiente Conjugado pré-condicionado**

---

Ler  $A, f$

Estimar  $u^{(0)}$

Fixar uma tolerância  $\gamma$

Calcular  $r^{(0)} = f - Au^{(0)}$

Resolver  $W\tilde{r}^{(0)} = r^{(0)}$

Atribuir  $p^{(0)} = \tilde{r}^{(0)}$

Para  $j = 0, 1, \dots$  até convergir

$$\omega_j = \frac{(\tilde{r}^{(j)}, r^{(j)})}{(Ap^{(j)}, p^{(j)})}$$

$$u^{(j+1)} = u^{(j)} + \omega_j p^{(j)}$$

$$r^{(j+1)} = r^{(j)} - \omega_j Ap^{(j)}$$

Resolver  $W\tilde{r}^{(j+1)} = r^{(j+1)}$

$$\beta_j = \frac{(\tilde{r}^{(j+1)}, r^{(j+1)})}{(\tilde{r}^{(j)}, r^{(j)})}$$

$$p^{(j+1)} = \tilde{r}^{(j+1)} + \beta_j p^{(j)}$$

Fim

---

## 3.2 NOÇÕES BÁSICAS DO MÉTODO *MULTIGRID*

Neste capítulo serão abordados os conceitos referentes ao método *Multigrid*, cuja filosofia está baseada no emprego de malhas auxiliares, mais grossas, nas quais as componentes do erro numérico são suavizadas, de tal modo que o processo iterativo se torna mais rápido. Serão apresentados seus princípios fundamentais, noções sobre os operadores de transferência entre malhas, tipos de ciclos e algoritmos.

### 3.2.1 Equação residual

Considere o sistema na forma  $Au = f$ . Supondo que ele tenha solução única  $u$  e uma aproximação dada por  $v$ , o erro numérico é dado por:

$$e = u - v. \quad (3.41)$$

A magnitude do erro numérico pode ser medida através de normas de vetores (BRIGGS et al., 2000; BURDEN e FAIRES, 2010). As normas mais utilizadas são a norma infinito ( $l_\infty$ ) e a norma Euclidiana ( $l_2$ ).

Como na prática o erro, assim como a solução analítica, é desconhecido, uma forma de se avaliar sua magnitude seria avaliar o resíduo, que é utilizado para mostrar o quanto à aproximação  $v$  não satisfaz o sistema dado pela Eq. (1.1). O resíduo é dado por:

$$r = f - Av, \quad (3.42)$$

sendo que sua norma pode ser medida pelas mesmas normas utilizadas para o erro.

Tem-se que  $e \approx 0$  implica em  $r \approx 0$ , porém  $r \approx 0$  não implica em  $e \approx 0$ . Para matrizes bem condicionadas, ou seja,  $cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \approx 1$ , se  $r \approx 0$ , então  $e \approx 0$  (BRIGGS et al., 2000).

Pode-se deduzir uma importante relação entre o erro e o resíduo denominada de equação residual:

$$Ae = r. \quad (3.43)$$

A equação residual informa que o erro satisfaz o mesmo conjunto de equações com a variável  $u$  quando  $f$  é substituída pelo resíduo  $r$ .

A equação residual tem uma grande vantagem. Supondo que uma aproximação  $v$  seja determinada através de um método iterativo, calcula-se o resíduo através da Eq. (3.42). Para melhorar a aproximação  $v$ , resolve-se a equação residual para  $e$  e então calcula-se uma nova aproximação usando a definição do erro:

$$v = v + e. \quad (3.44)$$

A equação residual é de grande importância no contexto do método *Multigrid*.

### 3.2.2 A filosofia do método *Multigrid*

Uma forma de reduzir as fortes oscilações do resíduo em cada malha é suavizá-los empregando um método de relaxação (método iterativo). Um dos métodos iterativos utilizados na literatura é o método *Multigrid*. Esse método tem como base a observação das propriedades dos métodos iterativos. A taxa de convergência depende dos autovalores da matriz de iteração associada ao método. O raio espectral da matriz (autovalor de maior magnitude) determina quão rápida a solução é alcançada. O autovetor associado a esse autovalor determina a distribuição do erro de iteração, variando consideravelmente de método para método (FERZIGER e PERIC, 2002).

A maior parte dos métodos iterativos padrão (como por exemplo, o método de Jacobi, Gauss-Seidel) apresenta propriedades de suavização de erros locais de alta frequência (componentes oscilatórias do erro), enquanto as baixas frequências são mantidas praticamente inalteradas. Desse modo, as primeiras iterações desse processo, geralmente, têm rápida convergência, caracterizando a presença de modos oscilatórios de erro. Porém, após algumas iterações o processo torna-se lento, sinalizando a predominância de modos suaves (BRANDT, 1977; BRIGGS, 2000).

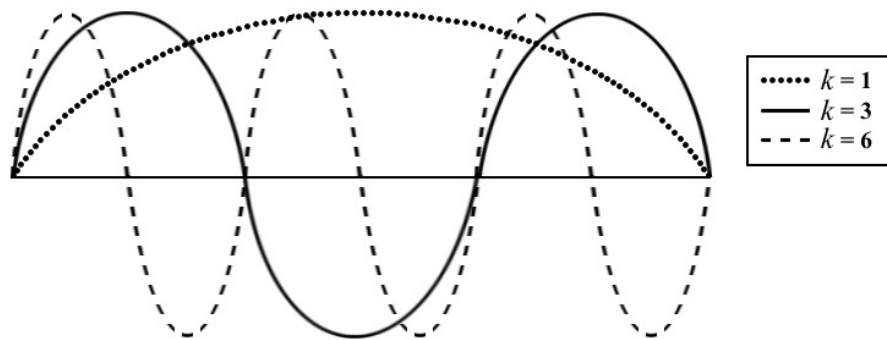
Uma boa estimativa inicial consiste de vetores chamados de modos de Fourier, que têm a forma:

$$v_j = \text{sen}\left(\frac{jk\pi}{N}\right), \quad 0 \leq j \leq N, \quad 1 \leq k \leq N-1, \quad (3.45)$$

onde  $v_j$  representa a  $j$ -ésima componente do vetor  $\mathbf{v}_k$ ,  $k$  é chamado de número de ondas (ou frequência) que constituem o vetor  $\mathbf{v}_k$  no domínio do problema,  $N$  é o número de pontos ou volumes da malha.

Os modos de Fourier da parte inferior do espectro, com  $1 \leq k \leq (N/2)$ , são chamados de modos de Fourier de baixa frequência ou modos suaves. Os modos localizados na parte superior do espectro, com  $(N/2) \leq k \leq (N-1)$ , são chamados de modos de Fourier de alta frequência ou modos oscilatórios (BRIGGS et al., 2000).

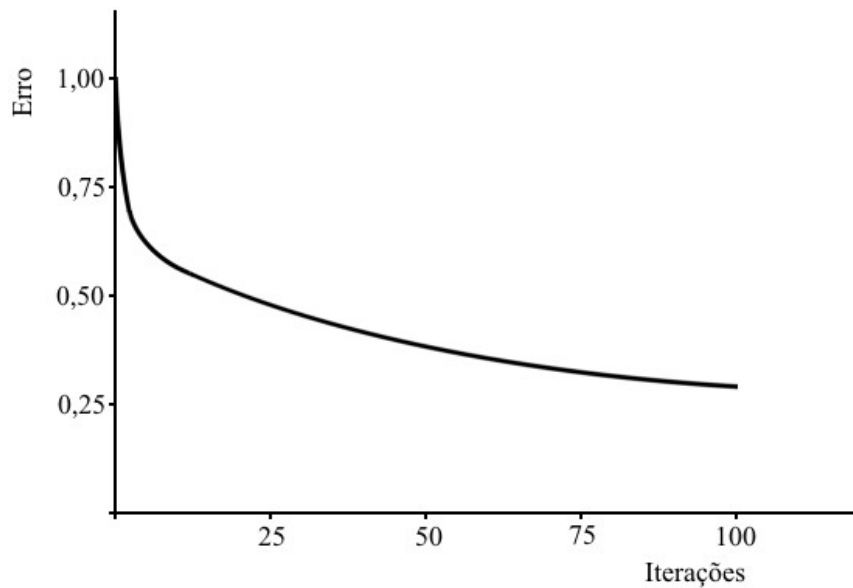
A Fig. 3.5, apresenta algumas estimativas iniciais que usam modos de Fourier com  $k = 1, 3$  e  $6$ .



**Figura 3.5: Modos de Fourier com  $k = 1, 3$  e  $6$  (adaptada de BRIGGS et al., 2000).**

Nota-se na Fig. 3.5 que pequenos valores de  $k$  correspondem a ondas longas e suaves, enquanto valores maiores de  $k$  referem-se a ondas mais oscilatórias. De acordo com Briggs et al. (2000) e Trottenberg et al. (2001), os métodos iterativos, como Jacobi Ponderado e Gauss-Seidel, possuem propriedades de suavização, ou seja, são capazes de reduzir rapidamente as componentes de erros oscilatórios (ou de alta frequência) (BRIGGS et al., 2000).

Os métodos iterativos que possuem a propriedade de suavização convergem rapidamente já nas iterações iniciais, ou seja, reduzem rapidamente os erros de alta frequência nas primeiras iterações, porém, a redução torna-se lenta com aumento do número de iterações, devido à persistência dos erros de baixa frequência (veja Fig. 3.6 para o caso 1D, por exemplo):



**Figura 3.6: Jacobi ponderado com fator de ponderação igual a 2/3 aplicado ao problema de condução de calor unidimensional com  $N = 64$ , estimativa inicial  $(v_1 + v_6 + v_{32})/3$  e para 100 iterações (BRIGGS et al., 2000).**

A ideia do método *Multigrid* consiste em cobrir um espectro maior de comprimentos de onda através da iteração em uma sequência de malhas cada vez mais grossas, ou seja, malhas com menor quantidade de pontos que a malha original. Nessas malhas mais grossas o processo de relaxação é repetido até que as componentes de erro se tornem suaves. Quando isto ocorre o problema é novamente transferido para uma malha mais grossa e assim sucessivamente até chegar à malha mais grossa estabelecida inicialmente ou na mais grossa possível. Os operadores que transferem tais informações são denominados operadores de transferência entre malhas.

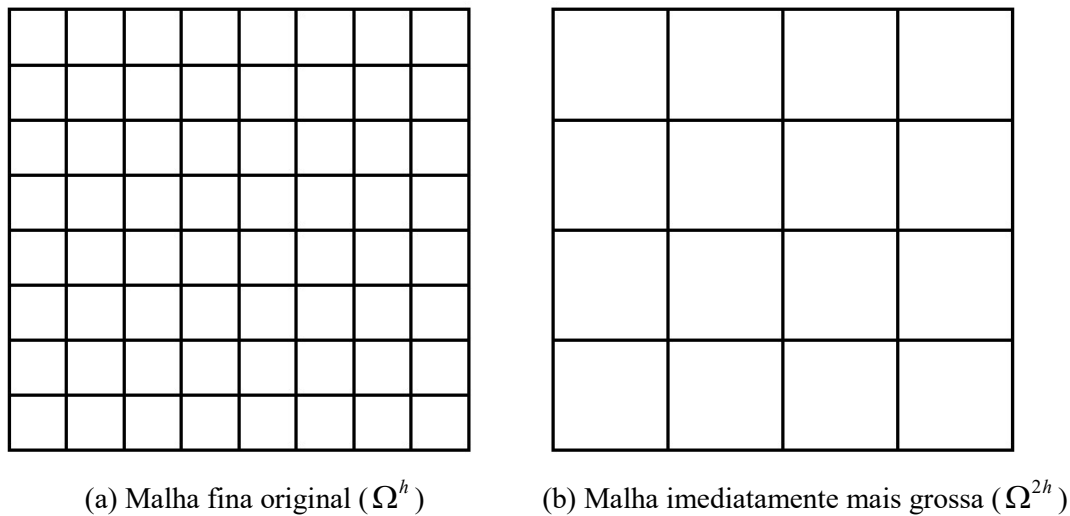
Os operadores que transferem informações da malha fina para a malha grossa são denominados operadores de restrição. Os operadores que transferem informações da malha grossa para a malha fina são denominados operadores de prolongação (ou interpolação). Tais operadores de transferência entre malhas serão detalhados no capítulo 6 devido a algumas adaptações necessárias pelo uso do método dos Volumes Finitos e à especificidade do uso de malhas desconstruídas (distintas localizações para variáveis distintas) que serão utilizadas.

A razão de engrossamento, para o caso bidimensional, considerando malhas uniformes, é definida como  $\tau = H/h$ , onde  $h$  representa o tamanho do espaçamento da malha fina  $\Omega^h$  (também chamado de dimensão dos elementos da malha fina),  $H$  o tamanho do elemento da malha imediatamente mais grossa  $\Omega^H$ .

Brandt (1977) constatou que a razão  $\tau = 2$  (caso no qual a malha grossa tem o dobro do espaçamento da malha fina, ou seja,  $H = 2h$ ) é a recomendável, por ser mais conveniente e

econômica para o processo de interpolação, além de ser de mais fácil implementação. Briggs et al. (2000) afirmam que  $\tau \neq 2$ , em geral, não traz vantagens.

A Fig. 3.7(a) representa uma malha fina original com  $N_x = N_y = 8$  volumes. Com o uso de  $\tau = 2$ , em ambas as direções, determina-se a malha imediatamente mais grossa com  $N_x = N_y = 4$  volumes, representada na Fig. 3.7(b) (engrossamento padrão). Para o caso particular com razão de engrossamento  $\tau = 2$ , tem-se que  $H = 2h$ , logo a malha imediatamente mais grossa pode ser representada por  $\Omega^{2h}$ . O engrossamento pode ainda ser realizado em uma única direção (semi-engrossamento) (OLIVEIRA et al., 2012).

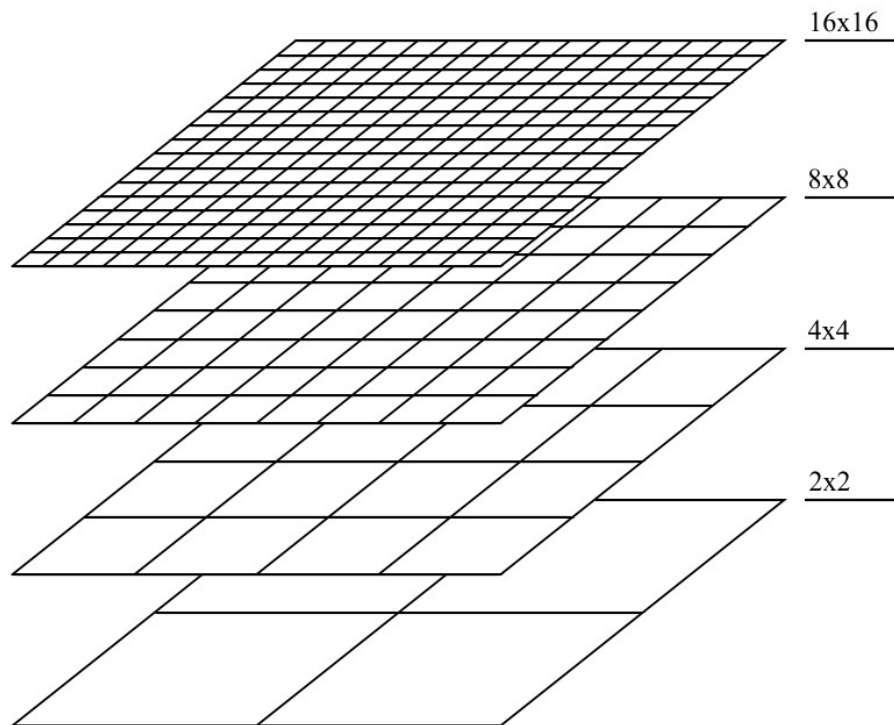


**Figura 3.7: Engrossamento padrão com razão de engrossamento  $\tau = 2$ .**

Na Fig. 3.8 aparece uma sequência de malhas que serão visitadas no chamado processo de engrossamento utilizando-se  $\tau = 2$ . Neste exemplo, considera-se uma malha de  $N = 16 \times 16$  volumes (malha mais fina). O processo de engrossamento foi realizado até atingir a malha  $N = 2 \times 2$  (a malha mais grossa possível). A quantidade de malhas utilizadas recebe o nome de número de níveis e será representado por  $\Gamma$ . No caso da Fig. 3.8,  $\Gamma = 4$ .

Segundo Ferziger e Peric (2002) e Roache (1998) a taxa de convergência ideal (teórica) do método *Multigrid* não depende do tamanho da malha, isto é, não depende do número de volumes da malha. Para obter um bom desempenho do *Multigrid*, diversos níveis de malha devem ser usados (TANNEHILL et al., 1997). Pinto e Marchi (2007) e Santiago e Marchi (2007) recomendam usar todos os níveis possíveis.





**Figura 3.8:** Processo de engrossamento e geração de malhas (adaptado de <http://www.mgnet.org/mgnet/tutorials/xwb/mg.html>).

### 3.2.3 Ciclos e algoritmos

Dois tipos de esquemas podem ser usados com o método *Multigrid* de acordo com o tipo de informação transferida (BRIGGS et al., 2000): esquema de correção (*Correction Scheme*, CS) e o esquema de aproximação completa (*Full Aproximation Scheme*, FAS).

O esquema CS transfere apenas o resíduo para a malha mais grossa e depois, retorna corrigindo a solução nas malhas mais refinadas. É mais adequado para problemas lineares, como os problemas modelados pelas equações de Poisson e Reação-Difusão, e por esse motivo, será utilizado este esquema neste trabalho.

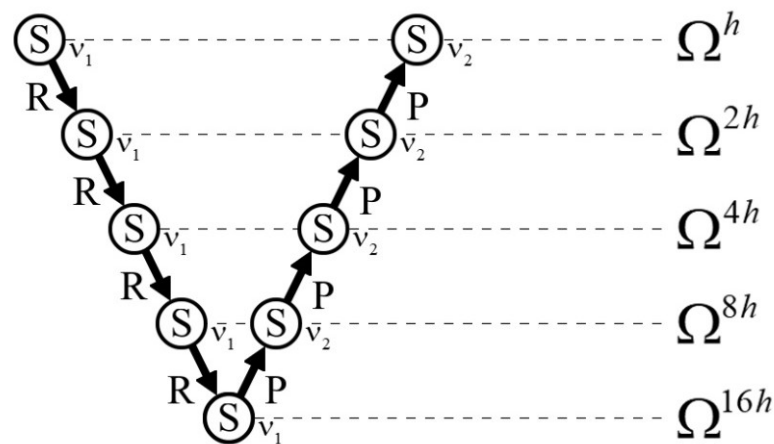
O esquema FAS transfere o resíduo e a solução, e a equação  $Au = f$  é resolvida em todas as malhas, sendo mais adequado a problemas não lineares. Mais detalhes sobre o esquema FAS podem ser encontrados em Briggs et al. (2000).

A sequência na qual as malhas são visitadas é chamada de ciclo *Multigrid*. No ciclo V, todas as malhas são visitadas uma única vez, da mais refinada para a mais grossa (restrição, representados genericamente por  $I_h^{2h}$ ) e da mais grossa para a mais refinada (prolongação, representados genericamente por  $I_{2h}^h$ ). Existe uma generalização do ciclo V conhecida como

ciclo  $\mu$  (WESSELING, 2004). Desta generalização podem-se obter o ciclo W, por exemplo, mas existem outros tipos de ciclos, como o ciclo F, dente-de-serra, etc.

Neste trabalho será usado o ciclo V, pois o ciclo W envolve cerca de 50% a mais de operações (HIRSCH, 1988).

A Figura 3.9 ilustra um ciclo V com CS para cinco malhas. Os super escritos  $h, 2h, 4h, \dots$  indicam a malha onde se definem os vetores ou matrizes, sendo que os números de suavizações (S) realizadas nos processos de restrição (R) (pré-suavização) e prolongação (P) (pós-suavização), respectivamente, são representados por  $v_1$  e  $v_2$ .



**Figura 3.9: Ciclo V para cinco malhas.**

No algoritmo 3.2 são apresentados os passos para a implementação de um único ciclo V. Os valores  $v_1$  e  $v_2$  representam o número de suavizações realizadas nos processos de restrição (pré-suavização) e prolongação (pós-suavização), respectivamente. Os super escritos  $h, 2h, 4h, \dots$  indicam a malha onde se definem os vetores ou matrizes.

O procedimento a seguir, descrito no algoritmo 3.3, desenvolve diversas chamadas do algoritmo 3.2 percorrendo vários ciclos V até se atingir um critério de parada ou alcançar o número máximo de ciclos escolhidos ( $ITE_{\max}$ ).

O método *Multigrid*, além de suavizador como pôde-se ver nesta seção, pode ser utilizado também como um pré-condicionador para o método Gradiente Conjugado pré-condicionado descrito na seção 3.1.3. Para isto, basta aplicar o método *Multigrid* uma ou mais vezes com a matriz original e com o resíduo no lado direito da Eq. (3.43) para obter uma aproximação da solução deste sistema linear. Tal procedimento foi utilizado neste trabalho, conforme será apresentado no capítulo de resultados.

---

**Algoritmo 3.2: Ciclo V e esquema CS para vários níveis de malhas (adaptado de Briggs et al., 2000)**


---

Início Esquema de Correção (CS)

CSMG ( $v_0, v, f, h, v_1, v_2$ )

1. Suavizar  $A^h u^h = f^h$   $v_1$  vezes em  $\Omega^h$  com estimativa inicial  $v_0^h$ ;
2. Calcular o resíduo usando  $R^h = f^h - A^h v^h$ ;
3. Restringir o resíduo da malha  $\Omega^h$  para a malha  $\Omega^{2h}$ :  $f^{2h} = I_h^{2h} R^h$ ;
  - a) Suavizar  $A^{2h} u^{2h} = f^{2h}$   $v_1$  vezes em  $\Omega^{2h}$  com estimativa inicial  $v_0^{2h} = 0$ ;
  - b) Calcular o resíduo usando  $R^{2h} = f^{2h} - A^{2h} v^{2h}$ ;
  - c) Restringir o resíduo da malha  $\Omega^{2h}$  para a malha  $\Omega^{4h}$ :  $f^{4h} = I_{2h}^{4h} R^{2h}$ ;
    - i) Suavizar  $A^{4h} u^{4h} = f^{4h}$   $v_1$  vezes em  $\Omega^{4h}$  com estimativa inicial  $v_0^{4h} = 0$ ;
    - ii) Calcular o resíduo usando  $R^{4h} = f^{4h} - A^{4h} v^{4h}$ ;
    - iii) Restringir o resíduo da malha  $\Omega^{4h}$  para a malha  $\Omega^{8h}$ :  $f^{8h} = I_{4h}^{8h} R^{4h}$ ;
    - ⋮
    - Resolver  $A^{Kh} u^{Kh} = f^{Kh}$ ;
    - ⋮
    - iv) Corrigir  $v^{4h} \leftarrow v^{4h} + I_{8h}^{4h} v^{8h}$ ;
    - v) Suavizar  $A^{4h} u^{4h} = f^{4h}$   $v_2$  vezes em  $\Omega^{4h}$  com estimativa inicial  $v^{4h}$ ;
  - d) Corrigir  $v^{2h} \leftarrow v^{2h} + I_{4h}^{2h} v^{4h}$ ;
  - e) Suavizar  $A^{2h} u^{2h} = f^{2h}$   $v_2$  vezes em  $\Omega^{2h}$  com estimativa inicial  $v^{2h}$ ;
4. Corrigir  $v^h \leftarrow v^h + I_{2h}^h v^{2h}$ ;
5. Suavizar  $A^h u^h = f^h$   $v_2$  vezes em  $\Omega^h$  com estimativa inicial  $v^h$ .

Fim de CSMG

---



---

**Algoritmo 3.3: Diversas chamadas do Multigrid com esquema CS**


---

Escolher  $v_0^h$  e  $ITE_{\max}$ .

1.  $i = 1$

Enquanto não atingir a convergência ou  $ITE_{\max}$ , faça:

2. CSMG ( $v_0, v, f, h, v_1, v_2$ )

3.  $v_0 = v$

4.  $i = i + 1$ .

Fim

---

## 4 MODELO MATEMÁTICO

Este capítulo apresenta os detalhes e especificidades do modelo matemático utilizado neste trabalho.

O modelo matemático em coordenadas cartesianas bidimensional considerado refere-se ao problema de escoamento laminar bidimensional em regime transiente de um fluido incompressível isotérmico modelado pelas equações de Navier-Stokes (PRITCHARD e MITCHELL, 2015), dado por:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v, \quad (4.3)$$

onde

$x$  e  $y$  são as coordenadas espaciais (variáveis independentes);

$t$  é a coordenada temporal (variável independente);

$\mathbf{u}$  é o vetor das velocidades;

$u, v$  são as coordenadas do vetor velocidade nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente;

$p$  é a pressão estática do fluido;

$\text{Re}$  é o número de Reynolds;

$\nabla$  é o operador gradiente;

$\nabla \cdot$  é o operador divergente;

$\nabla^2$  é o operador laplaciano.

Neste caso,  $\text{Re}$  está relacionado com as forças viscosas e com forças de inércia. Segundo Hughes e Brighton (1967) quando o número de  $\text{Re}$  é pequeno, ou seja,  $\text{Re} \ll 1$  as forças viscosas dominam e quando  $\text{Re} \gg 1$  de inércia predominam.

Reescrevendo as equações de Navier-Stokes com os termos não lineares (Eqs. (4.2) e (4.3)) na forma conservativa (WHITE, 1974):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u^2)_x + (uv)_y = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (uv)_x + (v^2)_y = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v. \quad (4.5)$$

Para este conjunto de equações, neste trabalho foi resolvido o problema Vórtices de Taylor-Green (PEARSON, 1964), cujo domínio é dado por  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq x \leq \pi \text{ e } -\pi \leq y \leq \pi\}$ , com  $\text{Re} = 1$  e a solução analítica por:

$$\begin{aligned} u &= -(\cos x \sen y) e^{-2(t+Ti)} \\ v &= -(\sen x \cos y) e^{-2(t+Ti)}, \\ p &= -\frac{1}{4} (\cos 2x \sen 2y) e^{-4(t+Ti)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde  $T_i$  é o tempo inicial e  $t > 0$ . Outros valores de  $\text{Re}$  poderiam ser testados, mas gerariam outras soluções analíticas não consideradas neste trabalho.

As condições iniciais e de contorno são obtidas diretamente da solução analítica.

Os métodos para solução das equações de Navier-Stokes para escoamentos de fluidos podem de maneira geral, ser classificados em métodos acoplados e métodos segregados (FERZIGER e PERIC, 2002; GUERMOND et al., 2006).

Métodos acoplados buscam resolver o sistema completo de equações a cada ciclo computacional, acoplando as equações de conservação de movimento e continuidade. Esta é a maneira mais imediata de se resolver as equações de Navier-Stokes, mas apresenta maiores dificuldades na sua implementação e um alto custo computacional, devido às fortes influências da não-linearidade dos termos convectivos (FERZIGER e PERIC, 2002).

Métodos segregados buscam o desacoplamento entre as equações, separando o sistema não-linear em problemas mais simples, que podem ser resolvidos sequencialmente. Dentre esses métodos, um dos que mais se destacam são os chamados métodos de Projeção (GUERMOND et al., 2006).

Basicamente, a ideia principal dos métodos de Projeção para as equações de Navier-Stokes, Eqs. (4.1) a (4.3), é utilizar a equação do movimento para determinar um campo de velocidade provisório.

De acordo com Ernst (2012) as Eqs. (4.7) e (4.8) são equações de Helmholtz

$$-(\nabla^2 + \kappa^2)u = f, \quad (4.7)$$

$$-(\nabla^2 - \eta)u = f, \quad (4.8)$$

onde  $\kappa$  e  $\eta$ , constantes que dependem do problema estudado e  $f$  o termo fonte.

A Eq. (4.8) descreve fenômenos estacionários de Reação-Difusão, sendo este o modelo a ser resolvido para obtenção do campo de velocidade provisório no método de Projeção. Apesar de similares, a Eq. (4.7) representa um desafio muito maior na aplicação dos métodos iterativos clássicos (ERNST, 2012).

Após obter este campo provisório, para o caso bidimensional, obtém um sistema de três equações e três incógnitas ( $u$ ,  $v$  e  $p$ ), onde a pressão só aparece em uma das equações. A função da pressão em escoamentos incompressíveis é fazer com que o campo de velocidade satisfaça a equação da continuidade. Portanto é necessário calcular a pressão no passo seguinte. Para isto uma equação elíptica do tipo Poisson é resolvida para que a equação da continuidade seja satisfeita e a pressão determinada (GUERMOND et al., 2006; GRIFFITH, 2009).

A equação de Poisson, apresentada na Eq. 4.9 é uma equação de derivadas parciais elípticas com uma ampla utilidade em escoamento de fluidos incompressíveis (INCROPERA et al., 2008):

$$\nabla^2 u = f, \quad (4.9)$$

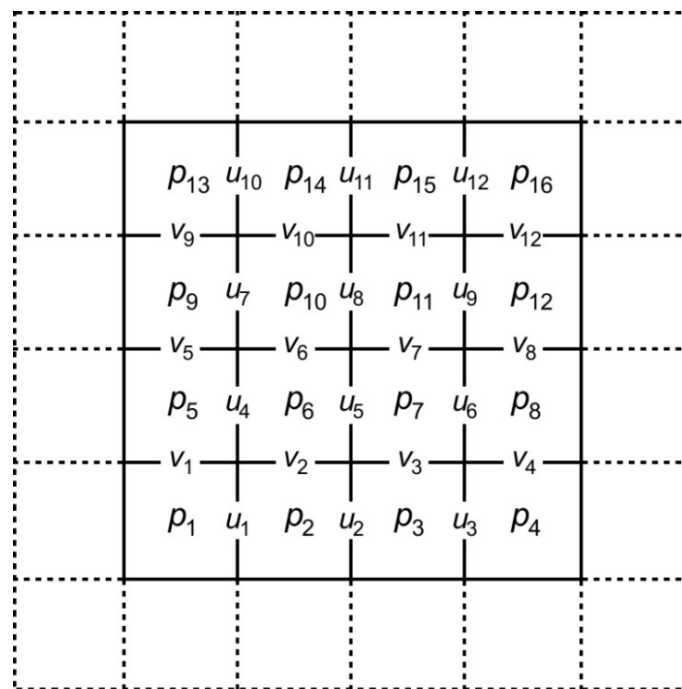
A importância dessa equação elíptica para a pressão é que ela faz a ligação entre as equações da conservação do movimento e da continuidade. Assim, o campo de velocidade final e a pressão são calculados por meio do valor da correção da pressão que é calculada por meio de uma equação desse tipo.

## 5 MODELO NUMÉRICO

Neste capítulo serão detalhadas as metodologias numéricas que foram exploradas nesta pesquisa.

### 5.1 TIPO DE MALHA UTILIZADA

Neste trabalho foi utilizado o método dos Volumes Finitos (MVF) com malhas desencontradas, conforme descrito em Harlow e Welch (1965), também utilizadas por Maliska (2004), sendo que as velocidades são posicionadas nas faces e a pressão no centro dos volumes. O uso dessa estratégia permite que sejam evitadas instabilidades numéricas na solução da pressão (SHIH et al., 1989; TROTTEBERG et al., 2001; DEVENDRAN e CORONA 2009). Tal malha e sua ordenação lexicográfica é representada na Fig. 5.1 (4 por 4 volumes):



**Figura 5.1: Malha e ordenação lexicográfica das variáveis pressão e velocidades.**

Nesta figura, os volumes com linhas tracejadas são os volumes fictícios (não pertencem ao domínio físico do problema) e percebe-se que ao usar esse tipo de malha, as condições de contorno para a variável  $u$  são automaticamente prescritas nos contornos oeste e leste, sendo que nos outros contornos faz-se necessário algum tipo de procedimento para que os volumes

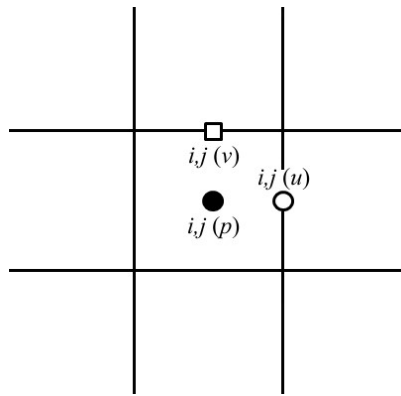
fictícios considerem as informações dos contornos. Aqui, usou-se extrapolação linear. Caso similar para a variável  $v$  nos contornos sul e norte.

A relação entre as coordenadas lexicográficas das variáveis pressão,  $pp$ , componentes  $u$  (horizontal),  $pu$ , e  $v$  (vertical),  $pv$ , da velocidade; e  $(i, j)$  são dadas por

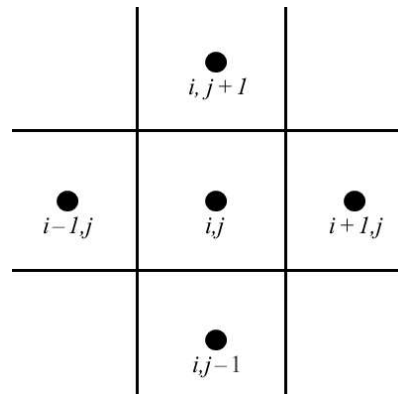
$$\begin{aligned} pp &= i + (j-1)N_{xp} \\ pv &= i + (j-1)N_{xv}, \\ pu &= i + (j-1)N_{xu} \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde  $N_{xp}$ ,  $N_{xu}$  e  $N_{xv}$  representam o número de volumes para a pressão e as velocidades nas faces, na direção  $x$ .

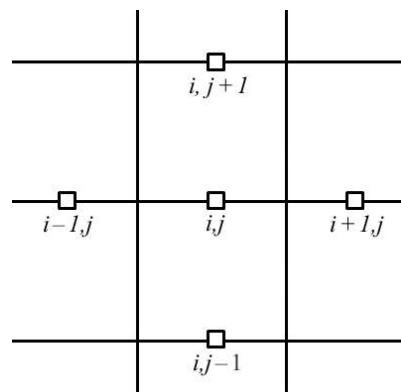
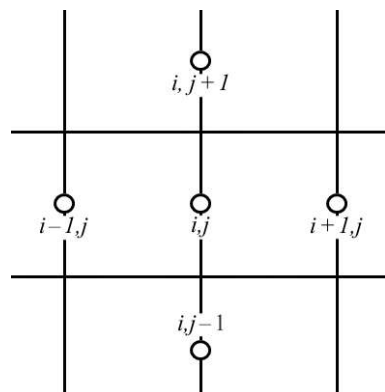
Na Fig. 5.2(a) é apresentado o recorte de uma malha com as posições  $(i, j)$  da pressão  $p$  (círculo cheio), da velocidade  $u$  (quadrado vazio) e velocidade  $v$  (quadrado cheio). Deve ficar claro que cada variável (pressão e velocidades) possui seu próprio índice  $(i, j)$ , cujas posições são mostradas na Fig. 5.2(a). Na Fig. 5.2(b) é apresentado o recorte de uma malha com os índices  $(i, j)$ ,  $(i-1, j)$ ,  $(i+1, j)$ ,  $(i, j-1)$ ,  $(i, j+1)$  da variável pressão. De forma similar ao caso da Fig. 5.2(b), nas figuras 5.2(c) e 5.2(d) são mostrados os índices das velocidades  $u$  e  $v$ , respectivamente.



(a) Posição dos índices  $(i, j)$  de  $p$ ,  $u$  e  $v$



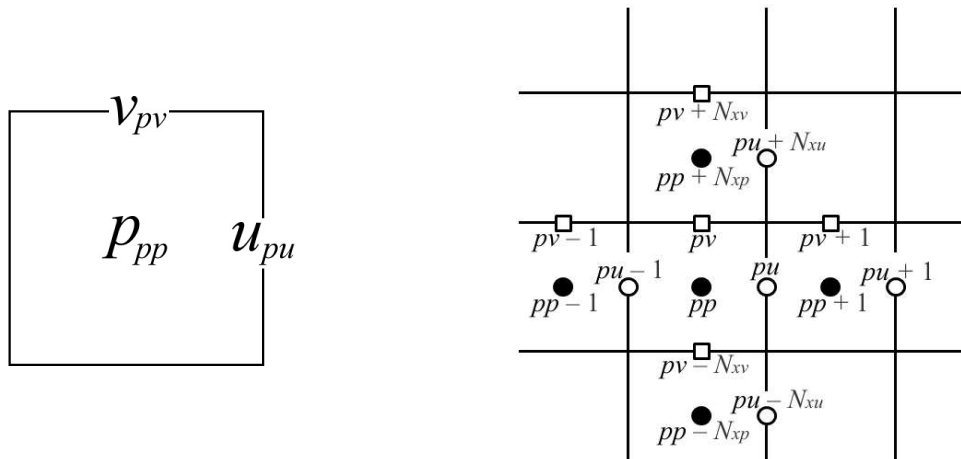
(b) Índices de  $p$





c) Índices de  $u$ d) Índices de  $v$ **Figura 5.2: Nomenclatura dos vizinhos genéricos dos volumes da malha bidimensional uniforme.**

Na Fig. 5.3(a) apresenta a disposição das variáveis em um volume genérico e a parte (b) reúne a disposição de todos os casos (b), (c) e (d) da Fig. 3.10, em ordem lexicográfica, obtidas de acordo com a Eq. (5.1):



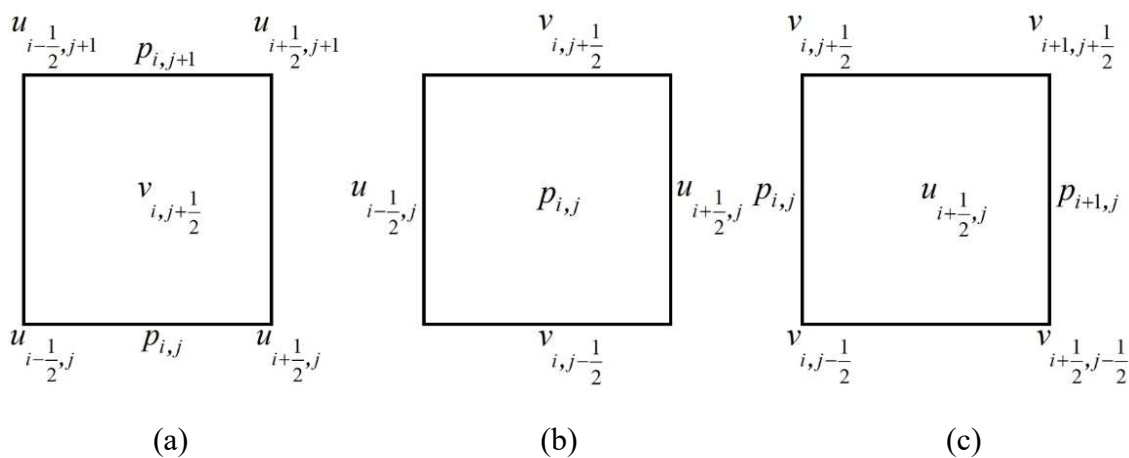
(a) Disposição das variáveis no volume

(b) Posições das variáveis e vizinhos em ordem lexicográfica

**Figura 5.3: Disposição das variáveis: velocidades nas faces e pressão no centro dos volumes.**

## 5.2 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL POR VOLUMES FINITOS

As Eqs. (4.1) a (4.3) são integradas em cada volume de controle, conforme representação na Fig. 5.4:



(a)

(b)

(c)

**Figura 5.4: Volumes de controle.**

Assim, as equações da conservação da massa, dada pela Eq. (4.1), da quantidade de movimento linear na direção  $x$ , Eq. (4.2) e da quantidade de movimento linear na direção  $y$ , Eq. (4.3), podem ser escritas como:

$$\oint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V u = -\oint_S u \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS - \oint_S p n_x dS + \frac{1}{\text{Re}} \oint_S \nabla u \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.3)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V v = -\oint_S v \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS - \oint_S p n_y dS + \frac{1}{\text{Re}} \oint_S \nabla v \cdot \mathbf{n} dS, \quad (5.4)$$

respectivamente.

Os termos das Eqs. (5.2), (5.3) e (5.4) foram discretizados utilizando o MVF empregando-se malhas desencontradas, onde as integrais são calculadas sobre os volumes de controle definidos na Fig. 5.4, sendo que por uma questão de simplicidade, foi utilizado o mesmo refinamento espacial em todas as direções, ou seja,  $h_x = h_y = h$  (malhas uniformes).

Para discretizar a equação da conservação da massa, foi utilizado um volume centrado em  $p$ , Fig. 5.4(b), de onde tem-se:

$$\oint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \approx u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} + v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} = 0. \quad (5.5)$$

Os termos das velocidades com variação no tempo são discretizados utilizando os volumes definidos nas Figs. 5.4(b e c) de acordo com

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV \approx \frac{u_{pu}^{n+1} - u_{pu}^n}{h_t} h^2 \quad (5.6)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V v dV \approx \frac{v_{pv}^{n+1} - v_{pv}^n}{h_t} h^2. \quad (5.7)$$

Os termos das pressões foram discretizados utilizando os volumes centrados nas componentes das velocidades definidos na Fig. 5.4(a e c), gerando:

$$\oint_S p n_x dS \approx (p_{i+1,j} - p_{i,j}) h \quad (5.8)$$

e

$$\oint_S p n_y dS \approx (p_{i,j+1} - p_{i,j}) h. \quad (5.9)$$

Os mesmos volumes de controle definidos na Fig. 5.4(a e c) foram utilizados para discretização dos termos difusivos, de onde obteve-se:

$$\begin{aligned} \oint_S \nabla u \cdot \mathbf{n} dS &\approx u_{i+\frac{3}{2},j}^n + u_{i-\frac{1}{2},j}^n + u_{i+\frac{1}{2},j+1}^n + u_{i+\frac{1}{2},j-1}^n - 4u_{i+\frac{1}{2},j}^n \\ \frac{3\mathbf{u}^t - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\nu h_t} &= \frac{\beta \mathbf{g}}{\nu} + \nabla^2 \mathbf{u}^t + \frac{\nabla p^n}{\nu} \\ \mathbf{u}^t \Big|_{\partial\Omega} &= \mathbf{b}^n \end{aligned} \quad (5.10)$$

e

$$\oint_S \nabla v \cdot \mathbf{n} dS \approx v_{i,j+\frac{3}{2}}^n + v_{i,j-\frac{1}{2}}^n + v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n + v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n - 4v_{i,j+\frac{1}{2}}^n. \quad (5.11)$$

Ainda fazendo uso dos volumes de controle centrados nas componentes das velocidades, os termos advectivos foram discretizados, resultando em:

$$\oint_S u \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \approx \left[ (u^2)_{i+1,j}^n + (u^2)_{i,j}^n + (uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - (uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n \right] h \quad (5.12)$$

e

$$\oint_S \mathbf{v} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \approx \left[ (v^2)_{i,j+1}^n + (v^2)_{i,j}^n + (uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - (uv)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n \right] h. \quad (5.13)$$

As velocidades que aparecem nas Eqs. (5.12) e (5.13) podem ser aproximadas por:

$$(u^2)_{i+1,j}^n = \left[ \frac{1}{2} \left( u_{i+\frac{3}{2},j}^n + u_{i+\frac{1}{2},j}^n \right) \right]^2, \quad (5.14)$$

$$(u^2)_{i,j}^n = \left[ \frac{1}{2} \left( u_{i+\frac{1}{2},j}^n + u_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) \right]^2, \quad (5.155)$$

$$(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n = \left[ \frac{1}{2} \left( u_{i+\frac{1}{2},j}^n + u_{i+\frac{1}{2},j+1}^n \right) \right] \left[ \frac{1}{2} \left( v_{i,j+\frac{1}{2}}^n + v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n \right) \right], \quad (5.16)$$

$$(uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n = \left[ \frac{1}{2} \left( u_{i+\frac{1}{2},j}^n + u_{i+\frac{1}{2},j-1}^n \right) \right] \left[ \frac{1}{2} \left( v_{i,j-\frac{1}{2}}^n + v_{i+1,j-\frac{1}{2}}^n \right) \right], \quad (5.17)$$

$$(uv)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n = \left[ \frac{1}{2} \left( u_{i-\frac{1}{2},j}^n + u_{i-\frac{1}{2},j+1}^n \right) \right] \left[ \frac{1}{2} \left( v_{i,j+\frac{1}{2}}^n + v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n \right) \right], \quad (5.18)$$

$$(v^2)_{i,j+1}^n = \left[ \frac{1}{2} \left( v_{i,j+\frac{3}{2}}^n + v_{i,j+\frac{1}{2}}^n \right) \right]^2 \mathbf{e} \quad (5.19)$$

$$(v^2)_{i,j}^n = \left[ \frac{1}{2} \left( v_{i,j+\frac{1}{2}}^n + v_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) \right]^2. \quad (5.20)$$

### 5.3 MÉTODOS DE PROJEÇÃO

Os métodos de Projeção ou passo fracionário para discretização temporal das equações de Navier-Stokes consistem, basicamente, na ideia de utilizar a equação do movimento para determinar um campo de velocidade provisório.

Após obtido este campo provisório, para o caso bidimensional, recai-se em um sistema de três equações e três incógnitas ( $u$ ,  $v$  e  $p$ ), onde a pressão só aparece em uma das equações. A função da pressão em escoamentos incompressíveis é fazer com que o campo de velocidade satisfaça a equação da continuidade. Portanto é necessário calcular a pressão no próximo passo. Para isto uma equação elíptica é resolvida para que a equação da continuidade seja satisfeita e a pressão determinada (GRESHO e SANI, 1987). A importância dessa equação elíptica para a pressão é que ela faz a ligação entre as equações da conservação do movimento e da continuidade. Assim, o campo de velocidade final e a pressão são calculados.

Os métodos de Projeção foram introduzidos por Chorin (1968) e Temam (1969) e são caracterizados pela solução das Eqs. (4.4) e (4.5) em dois passos.

Inicialmente uma velocidade auxiliar  $u^t$  é calculada desprezando-se a condição de incompressibilidade dada pela Eq. (4.1) e o termo da pressão (considera-se  $p = 0$  nas Eqs. (4.4) e (4.5)). Neste passo é resolvida a equação de Reação-Difusão com a discretização temporal. No segundo passo é calculada a pressão resolvendo-se uma equação de Poisson. Como este passo é equivalente à Projeção da velocidade auxiliar  $u^t$  no espaço dos campos vetoriais com divergente nulo, são obtidas condições de contorno de Neumann para a pressão. A propriedade mais atraente dos métodos de Projeção é o fato de que a cada passo de tempo resolve-se uma sequência de equações elípticas, desacopladas, para a pressão e velocidades permitindo que simulações numéricas de larga escala sejam realizadas de forma eficiente; no entanto, não é trivial desenvolver e analisar métodos de Projeção de altas ordens (GHERMOND et al, 2006).

Há várias discretizações para os métodos de Projeção, diferindo na forma de calcular a velocidade auxiliar  $u^t$  e o passo de projeção. A seguir será apresentada uma variação do método de Chorin (1968) para a componente  $u$  de  $u$ .

Substituindo as Eq. (5.6), (5.8), (5.10) e (5.12) na Eq. (5.3), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}}{h_t} = & -\frac{1}{h} \left[ (u^2)_{i+1,j}^n + (u^2)_{i,j}^n + (uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - (uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n \right] - \\ & -\frac{1}{h} (p_{i+1,j} - p_{i,j}) + \\ & + \frac{1}{h^2} \frac{1}{\text{Re}} \left( u_{i+\frac{3}{2},j}^n + u_{i-\frac{1}{2},j}^n + u_{i+\frac{1}{2},j+1}^n + u_{i+\frac{1}{2},j-1}^n - 4u_{i+\frac{1}{2},j}^n \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

A Eq. (5.21) pode ser escrita como:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{h_t} = \mathbf{A}_{i,j}^n + \mathbf{D}_{i,j}^n - \nabla p_{i,j}, \quad (5.22)$$

onde  $\mathbf{A}$  corresponde à parte advectiva,  $\mathbf{D}$  à parte difusiva, sendo

$$\mathbf{A}_{i,j}^n = -\frac{1}{h} \left[ (u^2)_{i+1,j}^n + (u^2)_{i,j}^n + (uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - (uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n \right], \quad (5.23)$$

$$\mathbf{D}_{i,j}^n = \frac{1}{h^2} \frac{1}{\text{Re}} \left( u_{i+\frac{3}{2},j}^n + u_{i-\frac{1}{2},j}^n + u_{i+\frac{1}{2},j+1}^n + u_{i+\frac{1}{2},j-1}^n - 4u_{i+\frac{1}{2},j}^n \right) \quad (5.24)$$

e

$$\nabla p_{i,j} = -\frac{1}{h} (p_{i+1,j} - p_{i,j}). \quad (5.25)$$

Introduzindo a variável auxiliar  $u^t$ , a Eq. (5.22) pode ser dividida em duas partes:

$$\frac{u^t - u_{i,j}^{n+1}}{h_t} = \mathbf{A}_{i,j}^n + \mathbf{D}_{i,j}^n \quad (5.26)$$

e

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u^t}{h_t} = -\nabla p_{i,j}. \quad (5.27)$$

Aplicando o operador divergente na Eq. (5.27) e recordando que  $\nabla \cdot u_{i,j}^{n+1} = 0$ , tem-se:

$$\nabla^2 p_{i,j} = \frac{1}{h_t} \nabla \cdot u^t. \quad (5.28)$$

Isolando a variável  $u^t$  na Eq. (5.26):

$$\mathbf{u}^t = \mathbf{u}_{i,j}^n + h_t \left( \mathbf{A}_{i,j}^n + \mathbf{D}_{i,j}^n \right). \quad (5.29)$$

As Eqs. (5.27), (5.28) e (5.29) representam o método de Projeção originalmente proposto por Chorin (1968) e Teman (1969) que é o método de Projeção com esquema de correção na pressão mais simples, que consiste basicamente em:

**Primeiro passo:**

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^t - \mathbf{u}^n}{h_t} &= - \left( \left( \mathbf{u}^n \right)^2 \right)_x - \left( \mathbf{u}^n \mathbf{v}^n \right)_y + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}^n \\ \frac{\mathbf{v}^t - \mathbf{v}^n}{h_t} &= - \left( \mathbf{u}^n \mathbf{v}^n \right)_x - \left( \left( \mathbf{v}^n \right)^2 \right)_y + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v}^n . \\ \mathbf{u}^t \Big|_{\partial\Omega} &= \mathbf{b}^n \end{aligned} \quad (5.30)$$

**Segundo passo:**

$$\begin{aligned} \nabla^2 p^{n+1} &= \frac{1}{h_t} \nabla \cdot \mathbf{u}^t , \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^t - h_t \nabla p^{n+1} \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde  $\mathbf{u}^t$  é o campo de velocidades auxiliar cujas componentes são  $u^t$  e  $v^t$ ,  $\mathbf{u}^n$  o campo de velocidades no passo de tempo  $n$ ,  $h_t$  é o refinamento temporal,  $p^n$  é pressão no passo de tempo  $n$  e  $\mathbf{b}^n$  as condições de contorno no passo de tempo  $n$ .

Devido à ausência do gradiente de pressão na Eq. (5.30), à condição de contorno de Neumann imposta na pressão  $\nabla p^{n+1} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\partial\Omega} = 0$ , onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal ao contorno, e a um erro devido ao passo de Projeção, o método de Chorin não chega a ser um método de primeira ordem (em relação ao tempo) na pressão na norma  $l_2$  (GUERMOND et al., 2006). O método de Chorin é conhecido como esquema de correção na pressão não incremental.

Goda (1979) observou que adicionando o gradiente de pressão, o método de Chorin apresenta uma melhora em termos de acurácia, ideia essa utilizada por Van Kan (1986) para desenvolver um esquema de correção na pressão incremental de segunda ordem, que foi melhorado por Timmermans et al., (1996) por meio de uma modificação nas condições de contorno para a pressão em relação ao método anterior citado. Esse método é conhecido (Guermond e Shen, 2001, 2004) como “correção incremental na pressão na forma rotacional” e será o adotado neste trabalho no que se refere à solução das equações de Navier-Stokes.

Ainda Guermond e Shen (2004) mostram que a versão incremental na forma rotacional é de segunda ordem para as velocidades nas normas  $l_2$ ,  $l_1$  e  $l_\infty$ . Para a pressão o esquema é de segunda ordem nas normas  $l_2$  e  $l_1$  e de ordem 3/2 na norma  $l_\infty$ . O método consiste nos seguintes passos:

**Primeiro passo:**

$$\begin{aligned} \frac{3\mathbf{u}^t - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\nu h_t} &= \frac{\beta\mathbf{g}}{\nu} + \nabla^2 \mathbf{u}^t + \frac{\nabla p^n}{\nu}, \\ \mathbf{u}^t|_{\partial\Omega} &= \mathbf{b}^n \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde  $\mathbf{u}^t$  é o campo de velocidades auxiliar,  $\mathbf{u}^n$  o campo de velocidades no passo de tempo  $n$ ,  $h_t$  é o refinamento temporal,  $p^n$  é pressão no passo de tempo  $n$  e  $\mathbf{b}^n$  as condições de contorno no passo de tempo  $n$ ,  $\beta\mathbf{g} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ , com  $\beta$  constante e  $\nu = 1/\text{Re}$ .

Rearranjando os termos da Eq. (5.32), tem-se:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \mathbf{u}^t + \frac{3\text{Re}}{2h_t} \mathbf{u}^t &= \text{Re} \left( \beta\mathbf{g} + \nabla p^n + \frac{4\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{2h_t} \right), \\ \mathbf{u}^t|_{\partial\Omega} &= \mathbf{b}^n \end{aligned} \quad (5.33)$$

que tem a forma da equação de Reação-Difusão, dada pela Eq. (4.8) para a variável  $\mathbf{u}^t$ , com:

$$\eta = -\frac{3\text{Re}}{2h_t} \quad (5.34)$$

e termo fonte

$$f = \text{Re} \left( \beta\mathbf{g} + \nabla p^n + \frac{4\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{2h_t} \right). \quad (5.35)$$

**Segundo passo:**



$$\begin{aligned}
\nabla^2 \phi^{n+1} &= \frac{3}{2h_t} \nabla \cdot \mathbf{u}^t \\
\mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^t - \frac{2h_t}{3} \nabla \phi^{n+1} \quad , \\
p^{n+1} &= p^n + \phi^{n+1} - \nu \nabla \cdot \mathbf{u}^t
\end{aligned} \tag{5.36}$$

onde  $\phi^{n+1}$  é a correção da pressão e a primeira equação desse conjunto tem a forma da equação de Poisson, conforme apresentado na Eq. (4.9). Tal algoritmo será dado a seguir e será designado por Algoritmo 5.1.

A versão acima tem como condições de contorno na pressão  $\partial_n p^{n+1} \Big|_{\partial\Omega} = -\nu (\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}^{n+1}) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\partial\Omega}$  que são consistentes. O método descrito é conhecido (GUERMOND e SHEN, 2001, 2004) como “correção incremental na pressão na forma rotacional” e será utilizado neste trabalho.

Para mais detalhes sobre métodos de Projeção, consultar Guermond et al. (2006).

#### 5.4 DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DAS VELOCIDADES E PRESSÃO

Definidas as discretizações e o método de Projeção a ser utilizado nesta pesquisa, pode-se determinar agora os coeficientes das velocidades que serão utilizados na montagem dos sistemas lineares a serem resolvidos.

Inicialmente, reescrevendo-se a Eq. (5.32), de modo a isolar a variável  $\mathbf{u}^t$ , usando as Eqs. (5.23) e (5.24), tem-se:

$$\frac{3}{2} \mathbf{u}^t - \frac{h_t}{\text{Re}} \mathbf{D}_{i,j}^t = 2\mathbf{u}^n + \frac{1}{2} \mathbf{u}^{n-1} + h_t (\mathbf{A}_{i,j}^t + \nabla p^n). \tag{5.37}$$

##### **Algoritmo 5.1: Método de Projeção**

---

Início

Estimar as condições iniciais de  $u$  e  $v$ :  $\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{u}^0$

Estimar as condições iniciais de  $P$ :  $P^0$

Estabelecer o último passo de tempo da simulação:  $N_t$

Para  $n = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1$ , faça:

Passo 1: dadas as velocidades  $\mathbf{u}^n$ ,  $\mathbf{u}^{n-1}$  e a pressão  $P^n$ , calcula-se  $\mathbf{u}^t$ , resolvendo-se a equação de Reação-Difusão:

$$-\nabla^2 \mathbf{u}' + \frac{3\text{Re}}{2h_t} \mathbf{u}' = \text{Re} \left( \beta \mathbf{g} + \nabla P^n + \frac{4\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{2h_t} \right)$$

Passo 2: dada a velocidade  $\mathbf{u}'$ , calcula-se  $\phi^{n+1}$ , resolvendo-se a equação de Poisson:

$$\nabla^2 \phi^{n+1} = \frac{3}{2h_t} \nabla \cdot \mathbf{u}'$$

Atualiza-se  $\mathbf{u}^{n+1}$  e  $P^{n+1}$  por:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}' - \frac{2h_t}{3} \nabla \phi^{n+1}$$

$$P^{n+1} = P^n + \phi^{n+1} - \nu \nabla \cdot \mathbf{u}'$$

Fim

Fim

Os termos difusivos, escritos na ordem lexicográfica adotada de acordo com a Fig. 5.1, fica, para  $u$ :

$$\mathbf{D}_u^t = \frac{1}{h^2} \left( u_{pu+1}^t + u_{pu-1}^t + u_{pu+N_{xu}}^t + u_{pu-N_{xu}}^t - 4u_{pu}^t \right). \quad (5.38)$$

Analogamente, para  $v$ :

$$\mathbf{D}_v^t = \frac{1}{h^2} \left( u_{pv+1}^t + u_{pv-1}^t + u_{pv+N_{xv}}^t + u_{pv-N_{xv}}^t - 4u_{pv}^t \right). \quad (5.39)$$

Reescrevendo os termos advectivos como  $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$  (VILLAR, 2007) e utilizando e ordenação lexicográfica adotada, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla u &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_{pu} \frac{(u_{pu+1} - u_{pu-1})}{2h} + \\ &\left( \frac{v_{pv} + v_{pv+1} + v_{pv-N_{xv}} + v_{pv+1-N_{xv}}}{4} \right) \frac{(u_{pu+N_{xu}} - u_{pu-N_{xu}})}{2h}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

sendo que o único termo que não está definido na expressão  $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$  é  $v$ . Portanto, usa-se uma média entre  $v$  “sobre” o ponto onde está  $u_{pu}$ .

De forma similar para  $v$  tem-se:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla v = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \left( \frac{u_{pu} + u_{pu-1} + u_{pu+N_{xu}} + v_{pu-1+N_{xu}}}{4} \right) \frac{(v_{pv+1} - v_{pv-1})}{2h} + v_{pv} \frac{(v_{pv+N_{xy}} - v_{pv-N_{xy}})}{2h}. \quad (5.41)$$

O gradiente da pressão da equação da Eq. (5.37) pode ser reescrito na ordem lexicográfica como

$$\nabla p^{n+1} = \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} = \frac{p_{pp+1}^n - p_{pp}^n}{h} \quad (5.42)$$

ou

$$\nabla p^{n+1} = \frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} = \frac{p_{pp+N_{xy}}^n - p_{pp}^n}{h}. \quad (5.43)$$

Comparando-se as Eqs. (5.42) e (5.43) com a Fig. 5.4 percebe-se que as derivadas dessas equações estão sendo calculadas sobre os pontos  $pv$  ou  $pu$ , ou seja, sobre as faces do volume onde se encontram as velocidades  $u_{pu}^{n+1}$  e  $v_{pv}^{n+1}$ , que está de acordo com a proposta de uso de malhas desencontradas, isto é, evitar instabilidades numéricas do tipo *odd-even* (Trottenberg et al., 2001). Vale ressaltar que as Eqs. (5.42) e (5.43) são aproximações da derivada da pressão de segunda ordem de acurácia pois são calculadas sobre os pontos  $pu$  e  $pv$ .

De forma similar ao gradiente da pressão, o gradiente da correção da pressão pode ser reescrito na ordem lexicográfica como

$$\nabla \phi^{n+1} = \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial x} = \frac{\phi_{pp+1}^n - \phi_{pp}^n}{h} \quad (5.44)$$

ou

$$\nabla\phi^{n+1} = \frac{\partial\phi^{n+1}}{\partial y} = \frac{\phi_{pp+Nxp}^n - \phi_{pp}^n}{h}. \quad (5.45)$$

As aproximações das Eqs. (5.44) e (5.45) são de segunda ordem porque são calculados nos pontos  $pu$  e  $pv$ .

#### 5.4.1 Coeficientes das velocidades para os volumes internos

Volumes internos se referem aos volumes que não possuem volumes fictícios como vizinhos. Para obter os coeficientes da velocidade destes volumes, basta substituir a Eq. (5.38) na Eq. (5.37). A dedução dos coeficientes para a componente horizontal da velocidade ( $u$ ) será apresentada a seguir. Para a velocidade  $v$ , a dedução é análoga.

$$\begin{aligned} u_{pu}^t \left( \frac{3}{2} + \frac{4h_t}{Reh^2} \right) &= u_{pu+1}^t \left( \frac{h_t}{Reh^2} \right) + u_{pu-1}^t \left( \frac{h_t}{Reh^2} \right) + u_{pu+Nxu}^t \left( \frac{h_t}{Reh^2} \right) + \\ &+ u_{pu-Nxu}^t \left( \frac{h_t}{Reh^2} \right) + 2\mathbf{u}^n + \frac{1}{2}\mathbf{u}^{n-1} + h_t (A_{i,j}^t + \nabla p^n) \end{aligned} \quad (5.46)$$

Considerando a forma:

$$a_P u_{pu}^t = a_E u_{pu+1}^t + a_W u_{pu-1}^t + a_N u_{pu+Nxu}^t + a_S u_{pu-Nxu}^t + b_P, \quad (5.47)$$

onde, tem-se as seguintes correspondências indiciais para as posições da variável  $u$ :  $E = pu + 1$ ,  $W = pu - 1$ ,  $N = pu + Nxu$  e  $S = pu - Nxu$ .  $b_P$  é o termo fonte.

Reescrevendo a Eq. (5.46) na forma da Eq. (5.47) tem-se que os coeficientes para os volumes internos e o termo fonte são dados por:

$$\begin{aligned} a_P &= \frac{3}{2} + \frac{4h_t}{Reh^2} \\ a_E &= a_W = \left( \frac{h_t}{Reh^2} \right) \\ a_N &= a_S = \left( \frac{h_t}{Reh^2} \right) \\ b_P &= 2\mathbf{u}^n + \frac{1}{2}\mathbf{u}^{n-1} + h_t (A_{i,j}^t + \nabla p^n) \end{aligned} \quad (5.48)$$

### 5.4.2 Coeficientes das velocidades para os volumes com contornos

Para obter os coeficientes da velocidade  $u$  nos volumes com contornos, como antes, basta substituir a Eq. (5.38) na Eq. (5.37). No entanto é necessário levar em consideração os contornos, o que será mostrado a seguir. Será apresentada apenas a dedução dos coeficientes para a componente horizontal da velocidade  $u$  no canto Sudoeste ( $SW$ ) pois a dedução para a velocidade  $v$  e os outros contornos é análoga.

Na Fig. 5.1 as linhas tracejadas representam os volumes fictícios, ou seja, volumes que não pertencem ao domínio físico do problema. É mostrada uma velocidade,  $u_{pu}$ , que possui dois vizinhos internos  $u_{pu+1}$  e  $u_{pu+Nxu}$ , um vizinho fictício  $u_{pu-Nxu}$  e uma velocidade,  $u_{pu-1}$ , que contém uma condição de contorno prescrita  $u_W$ . Além disso, é mostrada a condição de contorno  $u_S$  que não é considerada pela disposição das velocidades  $u$ . Desta figura podem-se deduzir as seguintes equações:

$$u_{pu-1} = u_W \quad (5.49)$$

e

$$u_{pu-Nxu} = 2u_S - u_{pu} \quad (5.50)$$

onde foi utilizado a extrapolação linear  $u_S = \frac{u_{pu} - u_{pu-Nxu}}{2}$ .

A substituição das Eqs. (5.38), (5.49) e (5.50) na Eq. (5.37) conduz a

$$\begin{aligned} u_{pu}^t \left( \frac{3}{2} + \frac{4h_t}{Reh^2} \right) &= u_{pu+1}^t \left( \frac{h_t}{Reh^2} \right) + u_{pu-Nxu}^t \left( \frac{h_t}{Reh^2} \right) + \\ &+ 2\mathbf{u}^n + \frac{1}{2}\mathbf{u}^{n-1} + h_t \left( A_{i,j}^t + \nabla p^n \right) + \left( \frac{h_t}{Reh^2} \right) (u_W + 2u_S) \end{aligned} \quad (5.51)$$

Comparando-se a Eq. (5.51) com a Eq. (5.47), tem-se:

$$\begin{aligned}
a_P &= \frac{3}{2} + \frac{4h_t}{\text{Re}h^2} \\
a_E &= \left( \frac{h_t}{\text{Re}h^2} \right) \\
a_W &= 0 \\
a_N &= \left( \frac{h_t}{\text{Re}h^2} \right) \\
a_S &= 0 \\
b_P &= 2\mathbf{u}^n + \frac{1}{2}\mathbf{u}^{n-1} + h_t \left( \mathbf{A}_{i,j}^t + \nabla p^n \right) + \left( \frac{h_t}{\text{Re}h^2} \right) (u_W + 2u_S)
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Inicia-se agora a descrição do procedimento para obtenção dos coeficientes da pressão, reescrevendo o laplaciano da correção da pressão, na ordem lexicográfica:

$$\mathbf{D}_\phi = \frac{1}{h^2} \left( \phi_{pp+1}^{n+1} + \phi_{pp-1}^{n+1} + \phi_{pp+Nxp}^{n+1} + \phi_{pp-Nxp}^{n+1} - 4\phi_{pp}^{n+1} \right), \tag{5.53}$$

O divergente na primeira equação da Eq. (5.36), discretizado na ordem lexicográfica é reescrito como

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^t = \frac{\partial u^t}{\partial x} + \frac{\partial v^t}{\partial y} = \frac{u_{pu}^t - u_{pu-1}^t}{h} + \frac{v_{pv}^t - v_{pv-Nxp}^t}{h} \tag{5.54}$$

Comparando-se a Eq. (5.54) com a Fig. 5.3 percebe-se que as derivadas estão sendo calculadas sobre o ponto  $pp$ , ou seja, sobre o centro do volume onde se encontra a pressão  $p_{pp}^{n+1}$ , que é exatamente o que se pretendia quando se utilizaram malhas desencontradas. Este arranjo de variáveis é o que evita instabilidades numéricas do tipo *odd-even* (Trottenberg et al., 2001).

De forma similar ao gradiente da pressão, Eq. (5.42), as derivadas da Eq. (5.54) são de segunda ordem porque são calculadas sobre o ponto  $pp$ .

### 5.4.3 Coeficientes da pressão para os volumes internos

Para obter os coeficientes dos volumes internos são possíveis duas estratégias: ou utilizar a condição de incompressibilidade ( $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}$ ) ou substituir as Eqs. (5.53) e (5.54) na primeira equação da Eq. (5.36), o que satisfaz a condição de incompressibilidade e resulta em

$$\begin{aligned} \phi_{pp}^{n+1} \left( \frac{4}{h^2} \right) &= \phi_{pp+1}^{n+1} \left( \frac{1}{h^2} \right) + \phi_{pp-1}^{n+1} \left( \frac{1}{h^2} \right) + \\ &+ \phi_{pp+Nxp}^{n+1} \left( \frac{1}{h^2} \right) + \phi_{pp-Nxp}^{n+1} \left( \frac{1}{h^2} \right) - \frac{3}{2h_t} \left( \frac{u_{pu}^t - u_{pu-1}^t}{h} + \frac{v_{pv}^t - v_{pv-Nxv}^t}{h} \right). \end{aligned} \quad (5.55)$$

Comparando com a forma da Eq. (5.47), os coeficientes e termo fonte são dados por:

$$\begin{aligned} a_P &= \frac{4}{h^2} \\ a_E &= a_W = \left( \frac{1}{h^2} \right) \\ a_N &= a_S = \left( \frac{1}{h^2} \right) \\ b_P &= -\frac{3}{2h_t} \left( \frac{u_{pu}^t - u_{pu-1}^t}{h} + \frac{v_{pv}^t - v_{pv-Nxv}^t}{h} \right) \end{aligned} \quad (5.56)$$

#### 5.4.4 Coeficientes da pressão para os volumes com contornos

Um dos grandes problemas das equações de Navier-Stokes é que a pressão e as velocidades estão acopladas pela condição de incompressibilidade. Para deduzir os coeficientes nos volumes que possuem vizinhos fictícios é necessário utilizar a condição de incompressibilidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = \frac{u_{pu}^{n+1} - u_{pu-1}^{n+1}}{h} + \frac{v_{pv}^{n+1} - v_{pv-Nxv}^{n+1}}{h} = 0. \quad (5.57)$$

Das Eqs. (5.36) tem  $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^t - \frac{2h_t}{3} \nabla \phi^{n+1}$  que completamente discretizada vai gerar as equações:

$$u_{pu}^{n+1} = u_{pu}^t - \frac{2h_t}{3} \left( \frac{\phi_{pp+1}^{n+1} - \phi_{pp}^{n+1}}{h} \right), \quad (5.58)$$

$$u_{pu-1}^{n+1} = u_{pu-1}^t - \frac{2h_t}{3} \left( \frac{\phi_{pp}^{n+1} - \phi_{pp-1}^{n+1}}{h} \right), \quad (5.58)$$

$$v_{pv}^{n+1} = u_{pv}^t - \frac{2h_t}{3} \left( \frac{\phi_{pp+Nxp}^{n+1} - \phi_{pp}^{n+1}}{h} \right) e \quad (5.60)$$

$$v_{pv-Nxv}^{n+1} = u_{pv-Nxv}^t - \frac{2h_t}{3} \left( \frac{\phi_{pp}^{n+1} - \phi_{pp-Nxv}^{n+1}}{h} \right). \quad (5.61)$$

Substituindo as Eqs. (5.58) a (5.59) na Eq. (5.57) (condição de incompressibilidade) os coeficientes e termo fonte na Eq. (5.56) seriam obtidos para volumes que não possuem volumes fictícios como vizinhos. Para o caso de volumes com contornos será realizada a dedução dos coeficientes para a pressão no canto Sudoeste (*SW*). A dedução para os outros contornos é análoga.

Na Fig. 5.1 as linhas tracejadas representam os volumes fictícios, ou seja, volumes que não pertencem ao domínio físico do problema. É mostrado um volume de pressão,  $P_{pp}$ , que possui duas faces internas  $u_{pu}$  e  $v_{pv}$ , e duas velocidades que possuem condição de contorno prescrita  $u_w$  e  $v_s$ . Da Fig. 5.1 pode-se deduzir as seguintes equações

$$u_{pu-1} = u_w \quad e \quad (5.62)$$

$$v_{pv-Nxv} = v_s. \quad (5.63)$$

Substituindo as Eqs. (5.58) a (5.63) na Eq. (5.57) tem-se

$$\phi_{pp}^{n+1} \left( \frac{2}{h^2} \right) = \phi_{pp}^{n+1} \left( \frac{1}{h^2} \right) + \phi_{pp}^{n+1} \left( \frac{1}{h^2} \right) - \left( \frac{2}{3h^t} \right) \left( \frac{u_{pu}^t - u_w}{h} + \frac{v_{pv}^t - v_s}{h} \right). \quad (5.64)$$

Comparando com uma equação na forma (5.47), tem-se que os coeficientes e termo fonte são dados por:



$$\begin{aligned}
a_P &= \frac{2}{h^2} \\
a_E &= \left( \frac{1}{h^2} \right) \\
a_W &= 0 \\
a_N &= \left( \frac{1}{h^2} \right) \\
a_S &= 0 \\
b_P &= - \left( \frac{2}{3h^t} \right) \left( \frac{u_{pu}^t - u_W}{h} + \frac{v_{pv}^t - v_S}{h} \right)
\end{aligned} \tag{5.65}$$

## 5.5 CONDIÇÃO DE INTEGRABILIDADE E ESTABILIDADE

Uma característica comum dos métodos de Projeção é que estes impõem condições de contorno de Neumann sobre a pressão nos contornos (GUERMOND et al., 2006), no caso do método utilizado neste trabalho,  $\partial_n p^{n+1} \Big|_{\partial\Omega} = -\nu (\nabla \times \nabla \times u^{n+1}) \cdot n \Big|_{\partial\Omega}$ .

Devido a estas condições de contorno, a seguinte condição de integrabilidade precisa ser satisfeita para garantir a existência e unicidade da solução (BRIGGS et al., 2000):

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \phi^{n+1} = \int_{\Omega} \frac{3}{2h_t} \nabla \cdot \mathbf{u}^t = 0. \tag{5.66}$$

Para satisfazer a Eq. (5.66) é aplicado a cada passo de tempo o procedimento utilizado por Villar (2007):

1. Calcular numericamente a integral de  $\frac{3}{2h_t} \nabla \cdot \mathbf{u}^t$  obtendo uma constante.
2. Subtrair essa constante da correção da pressão  $\phi^{n+1}$ .

Nas seções anteriores foi demonstrado que o termo  $\frac{3}{2h_t} \nabla \cdot \mathbf{u}^t$  é basicamente o termo fonte  $b_P$  da pressão (ver a primeira equação da Eq. (5.36), e a última equação da Eq. (5.56)) que é conhecido antes de se resolver a equação de Poisson no segundo passo do método de Projeção.

No presente trabalho, a Eq. (5.66) é calculada utilizando a regra do retângulo:

$$\int_{\Omega} \frac{3}{2h_t} \nabla \cdot \mathbf{u}^t = \sum_{pp=1}^{N_x N_y} b_{pp} h^2, \tag{5.67}$$

onde  $N_x N_y$  representa o número total de volumes da pressão e  $b_{pp}$  o termo fonte do volume  $pp$ .

Foi observado nos experimentos realizados neste trabalho que a condição de integrabilidade é necessária para se conhecer o valor “real” da pressão a cada passo de tempo. Se a condição de integrabilidade não for utilizada, a solução numérica das velocidades não será afetada. No entanto, a solução da pressão será do tipo  $p + C$ , onde  $C$  é uma constante, ou seja, a pressão obtida será o valor “real” mais uma constante.

Outra consideração que se tem que levar em conta, é que, se o passo de tempo  $h_t$  for muito grande em relação ao refinamento espacial ( $h_x$  e  $h_y$ ), as simulações podem se tornar instáveis (KALLAND, 2008). O critério utilizado neste trabalho para evitar instabilidades é dado por Maliska (2004) e Kalland (2008):

$$h_t < \frac{1}{2\text{Re}} \frac{h_x^2 h_y^2}{h_x^2 + h_y^2}. \quad (5.68)$$

Como foi considerado  $h_x = h_y = h$  neste trabalho, o critério pode ser reescrito como

$$h_t < \frac{h^2}{4\text{Re}}. \quad (5.69)$$

Em Kalland (2008) são apresentados outros critérios para a estabilidade numérica.

## **6. OPERADORES DE TRANSFERÊNCIA ENTRE MALHAS PARA O MÉTODO *MULTIGRID***

Neste capítulo vamos tratar da definição dos operadores de transferência entre as malhas, muito importante no contexto do método *Multigrid*.

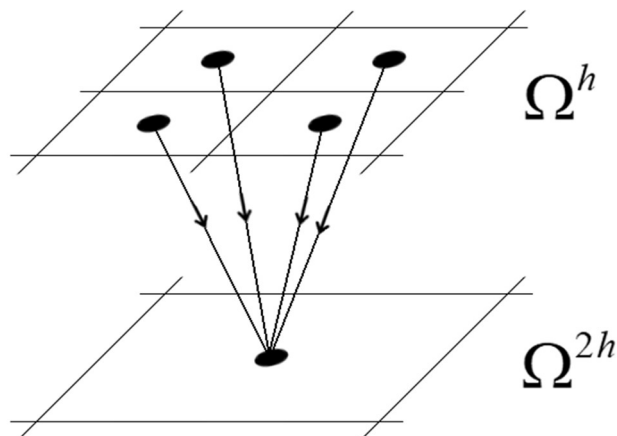
Como já foi dito na seção 3.2.2, os operadores que transferem informações da malha fina  $\Omega^h$  para a malha grossa  $\Omega^{2h}$  são denominados de operadores de restrição e são representados genericamente por  $I_h^{2h}$  e definidos por

$$v^{2h} = [I_h^{2h}] v^h . \quad (6.1)$$

Entre os operadores de restrição conhecidos na literatura está o operador de restrição por ponderação completa (BRIGGS et al., 2000; TROTTEBERG et al., 2001; WESSELING, 1992), definido para a pressão como

$$\phi_{pp}^{2h} = \frac{(\phi_{pp}^h + \phi_{pp+1}^h + \phi_{pp+N_{sp}}^h + \phi_{pp+N_{sp}+1}^h)}{4}, \quad (6.2)$$

onde  $\phi_{pp}^{2h}$  representa o valor da pressão na malha grossa  $\Omega^{2h}$  na posição  $pp$  ( $pp$  da malha grossa). De forma similar  $\phi_{pp}^h$  representa o valor da pressão na malha fina  $\Omega^h$  na posição  $pp$  ( $pp$  da malha fina). Na Fig. 6.1 é apresentada a ação do operador de restrição por ponderação completa com razão de engrossamento  $\tau = 2$  para a pressão em um problema bidimensional.

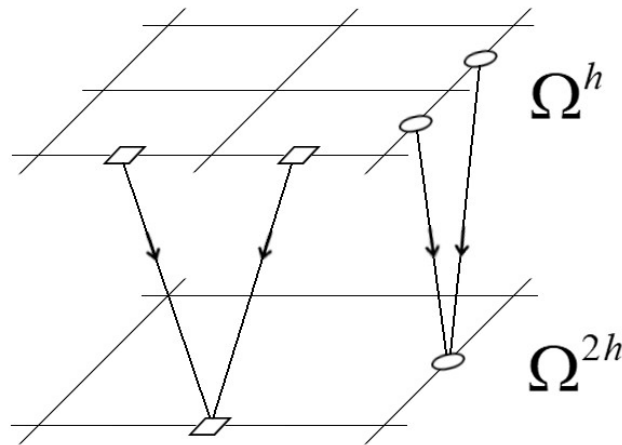


**Figura 6.1: Operador de restrição por ponderação completa para a variável centrada ( $p$ ).**

Para o caso das velocidades  $u$  e  $v$  o procedimento é semelhante ao utilizado por Trottenberg et al. (2001):

$$\begin{aligned} u_{pu}^{2h} &= \frac{(u_{pu}^h + u_{pu+N_{xu}}^h)}{2} \\ v_{pv}^{2h} &= \frac{(v_{pv}^h + v_{pv+1}^h)}{2} \end{aligned} \quad (6.3)$$

A Fig. 6.2 ilustra o processo de restrição de variáveis deslocadas apresentado na Eq. (6.3). Nela é mostrado como a informação contida nas faces dos volumes da malha fina  $\Omega^h$  é transferida para a malha grossa  $\Omega^{2h}$ .



**Figura 6.2: Operador de restrição por ponderação completa para as variáveis deslocadas ( $u$  e  $v$ ).**

Outros operadores de restrição utilizados na literatura são: injeção e meia ponderação. Mais detalhes sobre os operadores de restrição podem ser encontrados em Briggs et al. (2000) e Trottenberg et al. (2001). Neste trabalho utilizou-se restrição por ponderação completa por ter eficiência comprovada para o tipo de problema e de malhas que se está utilizando (TROTTEBERG et al., 2001).

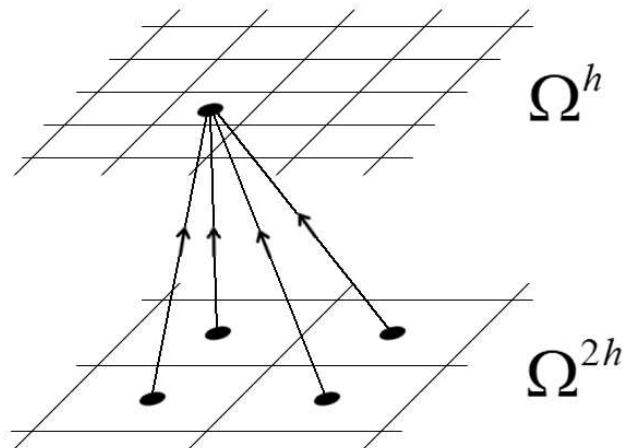
Os operadores que transferem informações da malha grossa  $\Omega^{2h}$  para a malha fina  $\Omega^h$  são chamados de operadores de prolongação, representados por  $I_{2h}^h$  e definidos por

$$v^h = [I]_{2h}^h v^{2h}. \quad (6.4)$$

Entre os operadores de prolongação conhecidos, um dos mais utilizados, é o operador de interpolação bilinear. Para o caso da pressão o procedimento é similar ao utilizado por Villar (2007) e seguindo a nomenclatura convencional para ordenação lexicográfica, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{pp}^h = \frac{(9\phi_{pp}^{2h} + 3\phi_{pp-1}^{2h} + 3\phi_{pp-N_{xp}}^{2h} + \phi_{pp-N_{xp}-1}^{2h})}{16} \\ \phi_{pp+1}^h = \frac{(9\phi_{pp}^{2h} + 3\phi_{pp+1}^{2h} + 3\phi_{pp-N_{xp}}^{2h} + \phi_{pp-N_{xp}+1}^{2h})}{16} \\ \phi_{pp+N_{xp}}^h = \frac{(9\phi_{pp}^{2h} + 3\phi_{pp-1}^{2h} + 3\phi_{pp+N_{xp}}^{2h} + \phi_{pp+N_{xp}-1}^{2h})}{16} \\ \phi_{pp+N_{xp}+1}^h = \frac{(9\phi_{pp}^{2h} + 3\phi_{pp+1}^{2h} + 3\phi_{pp+N_{xp}}^{2h} + \phi_{pp+N_{xp}+1}^{2h})}{16} \end{array} \right. \quad (6.5)$$

A Fig. 6.3 ilustra o processo de prolongação da pressão apresentado na Eq. (6.5). Nela é mostrado como a informação dos volumes da malha grossa  $\Omega^{2h}$  é transferida para os volumes da malha fina  $\Omega^h$ .

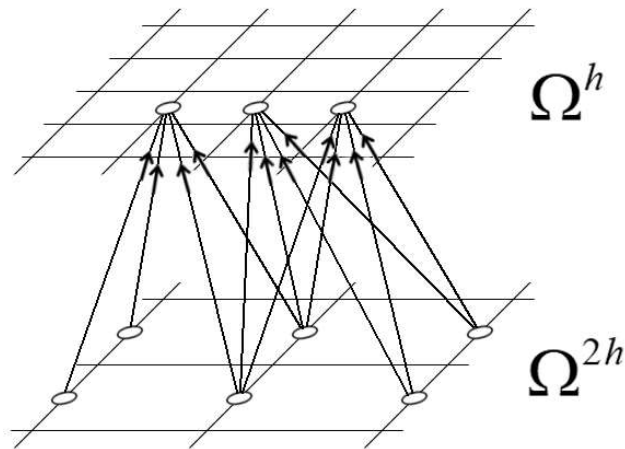


**Figura 6.3: Operador de prolongação por interpolação bilinear para a variável centrada ( $p$ ).**

Para o caso da variável  $u$  as equações de interpolação seguem o procedimento utilizado por Villar (2007) e utilizando a nomenclatura convencional para a ordenação lexicográfica, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{pu}^h = \frac{(3u_{pu}^{2h} + u_{pu-N_{xu}}^{2h})}{4} \\ u_{pu-1}^h = \frac{(3u_{pu}^{2h} + 3u_{pu-1}^{2h} + u_{pu-N_{xu}}^{2h} + u_{pu-N_{xu}-1}^{2h})}{8} \\ u_{pu+1}^h = \frac{(3u_{pu}^{2h} + 3u_{pu+1}^{2h} + u_{pu-N_{xu}}^{2h} + u_{pu-N_{xu}+1}^{2h})}{8} \\ u_{pu+N_{xu}}^h = \frac{(3u_{pu}^{2h} + u_{pu+N_{xu}}^{2h})}{4} \\ u_{pu+N_{xu}-1}^h = \frac{(3u_{pu}^{2h} + 3u_{pu-1}^{2h} + u_{pu+N_{xu}}^{2h} + u_{pu+N_{xu}-1}^{2h})}{8} \\ u_{pu+N_{xu}+1}^h = \frac{(3u_{pu}^{2h} + 3u_{pu+1}^{2h} + u_{pu+N_{xu}}^{2h} + u_{pu+N_{xu}+1}^{2h})}{8} \end{array} \right. \quad (6.6)$$

A Fig. 6.4 ilustra o processo de prolongação da variável  $u$  apresentado na Eq. (6.6). Nela é mostrado como a informação das faces da malha grossa  $\Omega^{2h}$  é transferida para as faces da malha fina  $\Omega^h$ .

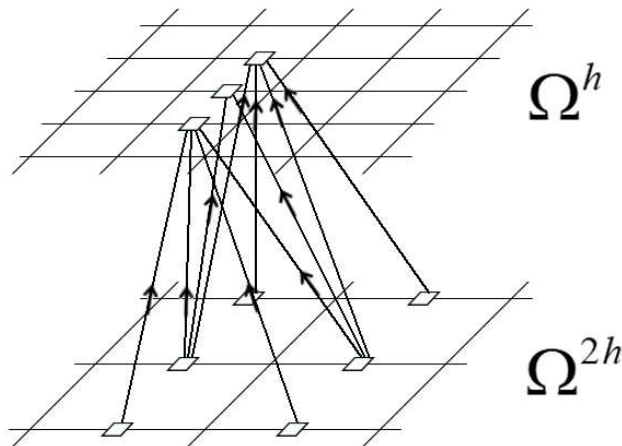


**Figura 6.4:** Operador de prolongação por interpolação bilinear para a variável deslocada ( $u$ ).

Para o caso da variável  $v$  as equações de interpolação seguem o procedimento utilizado por Villar (2007) e utilizando a nomenclatura convencional para a ordenação lexicográfica, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{pv}^h = \frac{(3v_{pv}^{2h} + v_{pv-1}^{2h})}{4} \\ u_{pv+N_{xy}}^h = \frac{(3v_{pv}^{2h} + 3v_{pv+N_{xy}}^{2h} + v_{pv-1}^{2h} + v_{pv+N_{xy}-1}^{2h})}{8} \\ v_{pv-N_{xy}}^h = \frac{(3v_{pv}^{2h} + 3v_{pv-N_{xy}}^{2h} + v_{pv-1}^{2h} + v_{pv-N_{xy}-1}^{2h})}{8} \\ v_{pv+1}^h = \frac{(3v_{pv}^{2h} + v_{pv+1}^{2h})}{4} \\ v_{pv-N_{xy}+1}^h = \frac{(3v_{pv}^{2h} + 3v_{pv-N_{xy}}^{2h} + v_{pv+1}^{2h} + v_{pv-N_{xy}+1}^{2h})}{8} \\ v_{pv+N_{xy}+1}^h = \frac{(3v_{pv}^{2h} + 3v_{pv+N_{xy}}^{2h} + v_{pv+1}^{2h} + v_{pv+N_{xy}+1}^{2h})}{8} \end{array} \right. \quad (6.7)$$

A Fig. 6.5 ilustra o processo de prolongação da variável  $v$  apresentado na Eq. (6.7). Nela é mostrado como a informação das faces da malha grossa  $\Omega^{2h}$  é transferida para as faces da malha fina  $\Omega^h$ .



**Figura 6.5: Operador de prolongação por interpolação bilinear para a variável deslocada ( $v$ ).**

Outros operadores de prolongação podem ser vistos em Wesseling (2004), como: o operador de interpolação quadrática ou o operador de prolongação de De Zeeuw. Neste trabalho utilizou-se prolongação por interpolação bilinear, pela simplicidade de implementação e pela eficiência comprovada para o tipo de problema e de malhas que se está utilizando (BRIGGS et al., 2000; TROTTENBERG et al., 2001).

## 7 RESULTADOS

Neste capítulo aparecem os resultados dos testes computacionais feitos para as equações de Navier-Stokes, onde são descritos os detalhes computacionais, as metodologias estudadas e as análises das simulações realizadas.

### 7.1 DETALHES COMPUTACIONAIS

Testes computacionais foram realizados para calcular os valores de  $p$ ,  $u$  e  $v$  no problema modelo discretizado, resolvendo-se, para as velocidades, as equações de Reação-Difusão, dadas pelas Eqs. (5.33) e depois, para a pressão, a equação de Poisson, dada pela Eq. (5.36), usando as metodologias descritas a seguir:

- 1) *Multigrid* com *solver* Gauss-Seidel (MG-GS).
- 2) *Multigrid* com *solver* ILU (MG-ILU).
- 3) Gradiente Conjugado pré-condicionado com *Multigrid* e *solver* Gauss-Seidel (PCG-MG-GS).
- 4) Gradiente Conjugado pré-condicionado com *Multigrid* e *solver* ILU (PCG-MG-ILU).

Em Anunciação et al. (2017), tais metodologias foram testadas para a equação de Poisson com termo fonte teórico e solução analítica fabricada e os resultados mostraram-se satisfatórios, pois houve redução dos mesmos parâmetros que foram analisados no presente trabalho, o que serviu de motivação para seguir nesta linha de pesquisa.

Em todas as simulações e para todas as variáveis de interesse, o critério de parada utilizado foi a norma  $l_2$  do resíduo adimensionalizada com base na estimativa inicial, dada por:

$$\frac{\|r^{(k)}\|_2}{\|r^{(0)}\|_2} < \varepsilon, \quad (7.1)$$

onde  $r^{(k)}$  é o resíduo na iteração atual e  $r^{(0)}$  é o resíduo da estimativa inicial, e  $\varepsilon$  é a tolerância.

Neste trabalho foi utilizado o vetor nulo como estimativa inicial para todas as variáveis de interesse e  $\varepsilon = 10^{-10}$  com o uso de precisão dupla. Utilizou-se a razão de engrossamento padrão, ou seja,  $\tau = 2$  (BRIGGS et al., 2000), onde o método *Multigrid* partiu da malha mais fina e foi até a malha mais grossa possível, ou seja, a malha com  $N = 2 \times 2$  volumes (OLIVEIRA



et al., 2012). O número de incógnitas nas malhas mais finas foram:  $N = 16 \times 16, 32 \times 32, 64 \times 64, 128 \times 128, 256 \times 256, 512 \times 512$  e  $1024 \times 1024$ . O número de pré e pós-suavização foi igual a  $\nu = \nu_1 = \nu_2 = 3$ .

O computador utilizado para as simulações possui processador Intel Core i7-5500, CPU de 2.40 GHz, Memória de 16.0 Gb, sistema operacional Windows 10 de 64 bits.

Para efeito de comparação entre as quatro metodologias foram analisados quatro parâmetros:

- Norma infinito do erro numérico ( $\|E\|$ );
- Norma  $l_2$  do resíduo adimensionalizada com base na estimativa inicial (Eq. (7.1));
- Fator de convergência empírico, definido como (TROTTEBERG et al., 2001):

$$q^{(k)} = \frac{\|r^{(k)}\|_2}{\|r^{(k-1)}\|_2}; \quad (7.2)$$

- e tempo de CPU.

Para definições das normas  $l_2$  e infinito, veja Burden e Faires, (2010).

## 7.2 ANÁLISE DA PRESSÃO

Nesta fase pretende-se determinar o melhor método para resolver a equação de Poisson, que modela a pressão, fixando-se um método que resolve as equações das velocidades, sendo este, o mesmo utilizado no trabalho de Neundorf et al. (2016), que em seu estudo utilizou, tanto para a pressão, quanto para as velocidades, o método MG-GS. Aqui, utilizou-se MG-GS, MG-ILU, PCG-MG-GS e PCG-MG-ILU para a pressão (ANUNCIACÃO et al., 2017) e MG-GS para as velocidades.

Inicialmente foi avaliado o comportamento da norma infinito do erro numérico para os quatro métodos estudados, onde pode-se perceber que todos eles apresentaram redução da norma do erro numérico com o aumento do tamanho do problema; característica desejável de um método numérico convergente (veja Fig. 7.1).

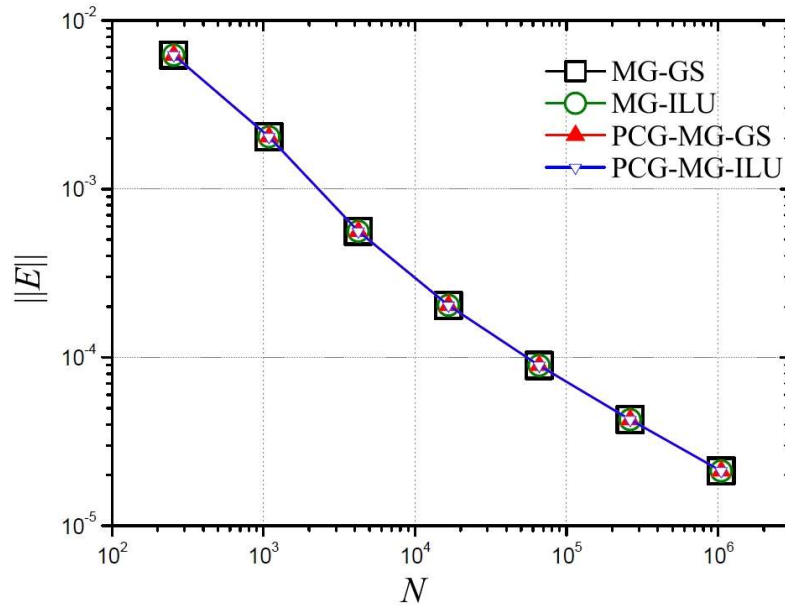


Figura 7.1: Norma infinito do erro numérico ( $\|E\|$ ) versus tamanho do problema ( $N$ ) para  $p$ .

A Fig. 7.2 apresenta o número de iterações necessárias para se atingir o critério de parada para o problema com  $N = 1024 \times 1024$ . Com base nesta figura, pode-se perceber que PCG-MG-ILU foi o que atingiu o critério de parada em um menor número de iterações.

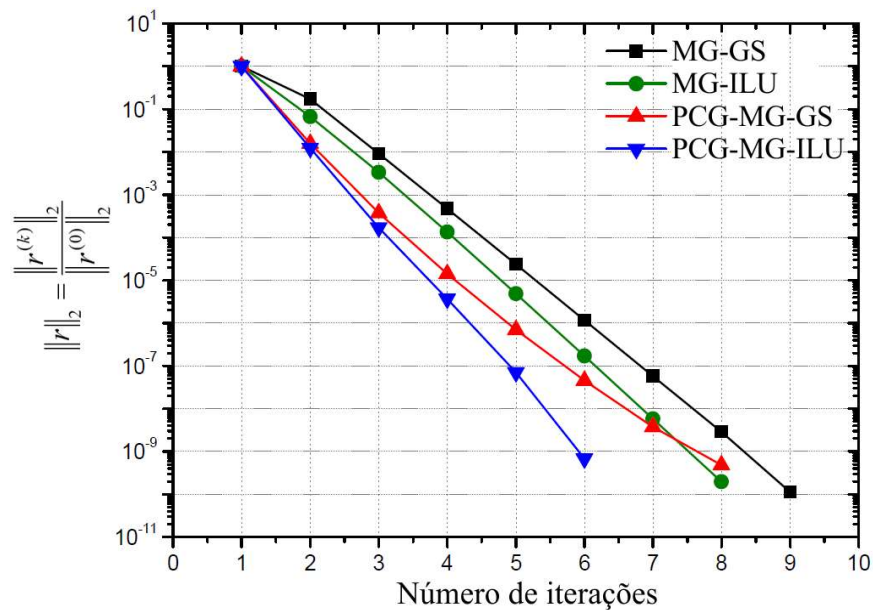


Figura 7.2: Norma  $l_2$  do resíduo adimensionalizada pela norma da estimativa inicial versus número de iterações para o problema com  $N = 1024 \times 1024$  para  $p$ .

A Fig. 7.3 ilustra como se comporta o fator de convergência empírico com o aumento do tamanho do problema. Com base nesta figura, pode-se afirmar novamente, que a metodologia PCG-MG-ILU apresentou os melhores resultados, pois é a que gerou melhores

valores para os fatores de convergência, ou seja, valores mais próximos de zero (Briggs et al., 2000; Burden e Faires, 2010).

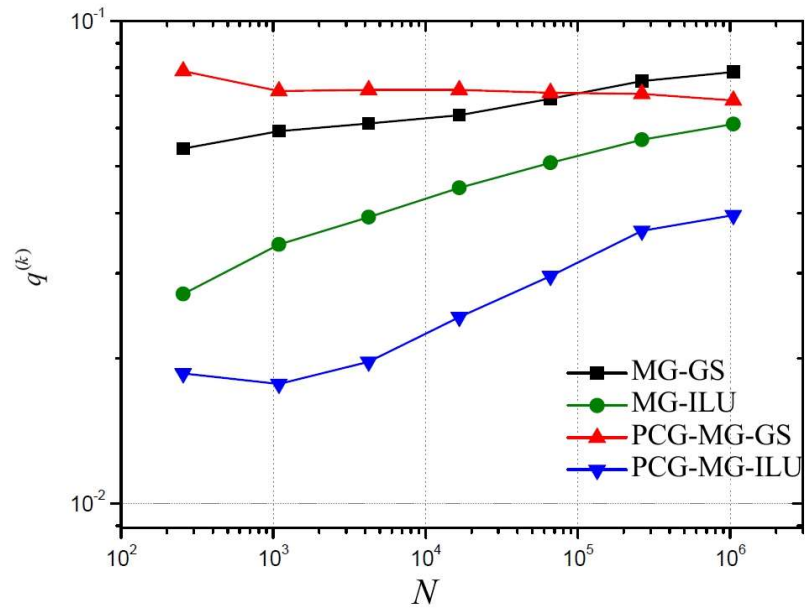


Figura 7.3: Fator de convergência empírico ( $q^{(k)}$ ) versus tamanho do problema ( $N$ ) para  $p$ .

A Fig. 7.4 ilustra o comportamento do tempo de CPU (em segundos) das simulações com o aumento do tamanho do problema. Pode-se perceber que os tempos computacionais ficaram muito próximos, com leve ganho para a metodologia PCG-MG-ILU, o que pode ser confirmado na sequência.

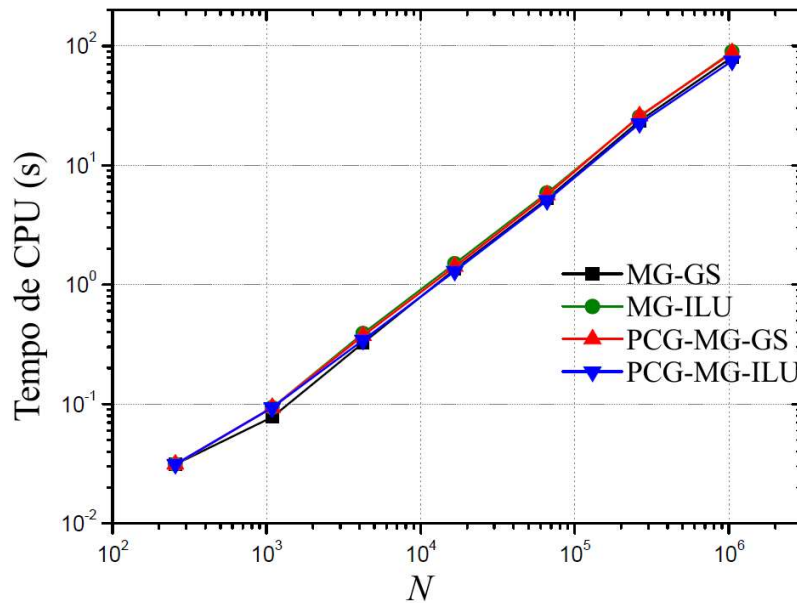


Figura 7.4: Tempo de CPU (em segundos) versus tamanho do problema ( $N$ ) para  $p$ .

O *Speed-up* é uma medida utilizada para determinar o aumento de velocidade obtido durante a execução de um programa utilizando um algoritmo “A” em relação a sua execução utilizando um algoritmo “B” (GALANTE, 2006; TROTTEBERG et al., 2001). O *Speed-up* é dado pela fórmula:

$$S_p = \frac{t_{CPU}(\text{algoritmo A})}{t_{CPU}(\text{algoritmo B})}. \quad (7.3)$$

A Tab. 7.1 mostra o *Speed-up* dos três métodos: MG-GS, MG-ILU e PCG-MG-GS em relação ao método PCG-MG-ILU.

**Tabela 7.1: *Speed-up* de MG-GS, MG-ILU e PCG-MG-GS em relação a PCG-MG-ILU ( $p$ )**

$N$	MG-GS	MG-ILU	PCG-MG-GS
16x16	1	1	1
32x32	0,833	1	1
64x64	0,948	1,136	1,109
128x128	1,036	1,156	1,109
256x256	1,033	1,153	1,110
512x512	1,055	1,139	1,160
1024x1024	1,074	1,194	1,167

De acordo com os dados apresentados nesta tabela, pode-se confirmar que os tempos de CPU estão próximos entre si, mas há um leve ganho com o uso do PCG-MG-ILU (*Speed-up* maior que 1), conforme descrito em Anunciação et al. (2017).

Tudo isto guia-nos a concluir que o método PCG-MG-ILU tem o potencial para acelerar a convergência do problema apresentado.

### 7.3 ANÁLISE DAS VELOCIDADES

Nesta fase pretende-se determinar o melhor método para resolver as equações de Reação-Difusão, que modelam as velocidades  $u$  e  $v$ , fixando-se o melhor método para a pressão apresentado na seção anterior, que foi PCG-MG-ILU. Como os resultados das velocidades  $u$  e  $v$  para todos os parâmetros, são similares, optou-se por mostrar apenas os resultados para  $u$ .

Na Fig. 7.5 tem-se a o comportamento do erro numérico *versus* tamanho do problema, para os diversos métodos de solução. Percebe-se que os quatro métodos estudados apresentam

uma característica esperada para métodos iterativos convergentes, ou seja, redução do erro numérico com o aumento do tamanho do problema. Nota-se também, que os erros apresentados possuem valores muito próximos entre si.

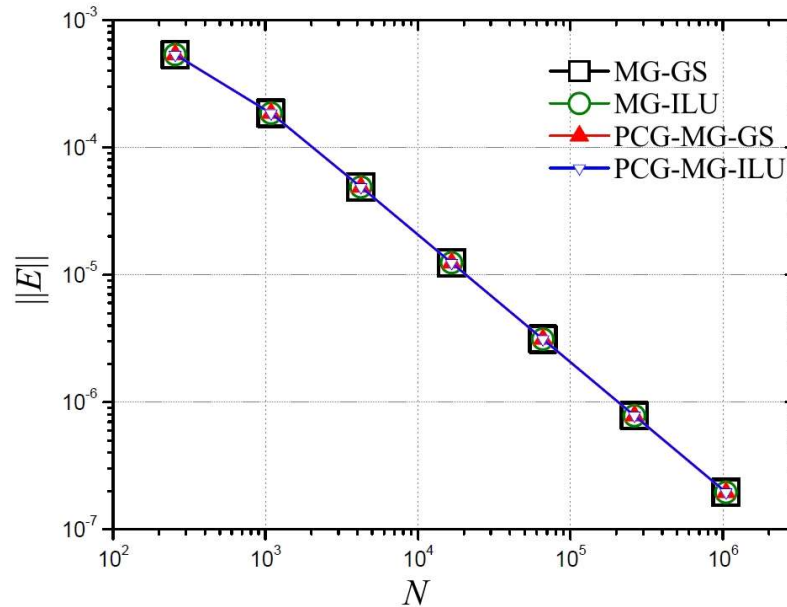


Figura 7.5: Norma infinito do erro numérico ( $\|E\|$ ) versus tamanho do problema ( $N$ ) para  $u$ .

A Fig. 7.6 retrata o comportamento da norma  $l_2$  do resíduo adimensionalizada pela norma  $l_2$  da estimativa inicial em função do número de iterações para o problema com  $N = 1024 \times 1024$  volumes. Baseando-se nesta figura, percebe-se que o método PCG-MG-ILU e o MG-ILU foram os que atingiram o critério de parada em um menor número de iterações.

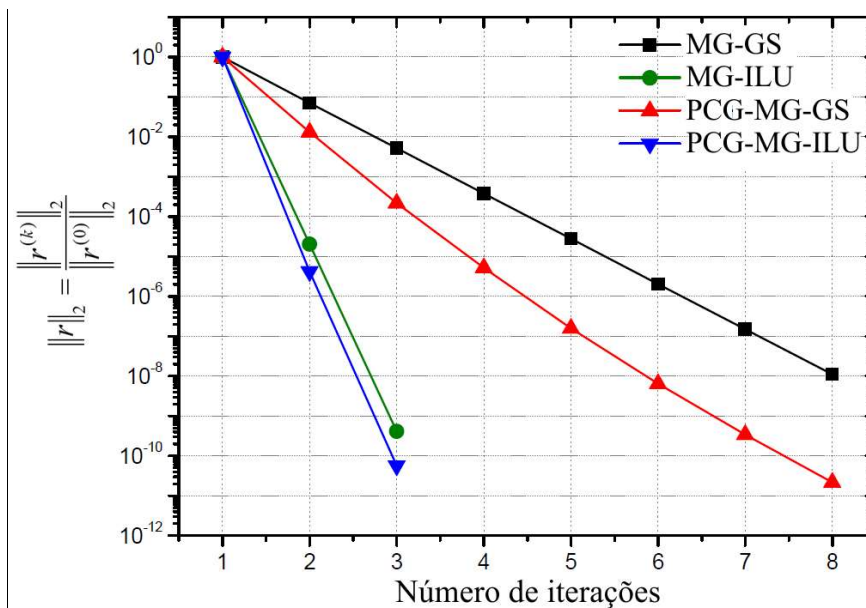


Figura 7.6: Norma  $l_2$  do resíduo adimensionalizada pela norma  $l_2$  da estimativa inicial versus número de iterações para o problema com  $N = 1024 \times 1024$  para  $u$ .

A Fig. 7.7 ilustra o comportamento do fator de convergência empírico em função do tamanho do problema. Com base nesta figura, pode-se concluir que o método PCG-MG-ILU apresentou os melhores resultados, pois é o que gerou os melhores valores para os fatores de convergência (valores mais próximos de zero), além de diminuir seu valor com o aumento do tamanho do problema.

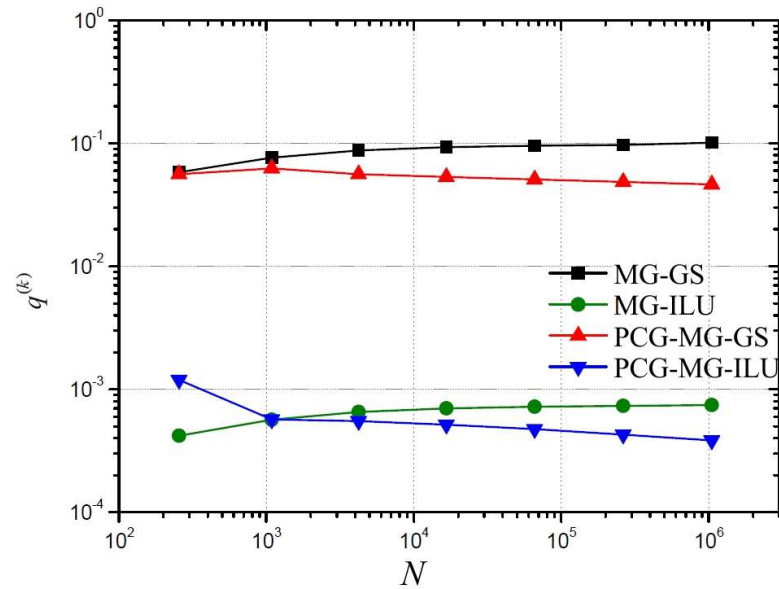


Figura 7.7: Fator de convergência empírico ( $q^{(k)}$ ) versus tamanho do problema ( $N$ ) para  $u$ .

A Fig. 7.8 contém os valores dos tempos de CPU (em segundos) das simulações com o aumento do tamanho do problema. Com base nesta figura, percebe-se que os tempos computacionais ficaram muito próximos, com leve ganho para a metodologia PCG-MG-ILU, o que pode ser comprovado nos apresentados na sequência.

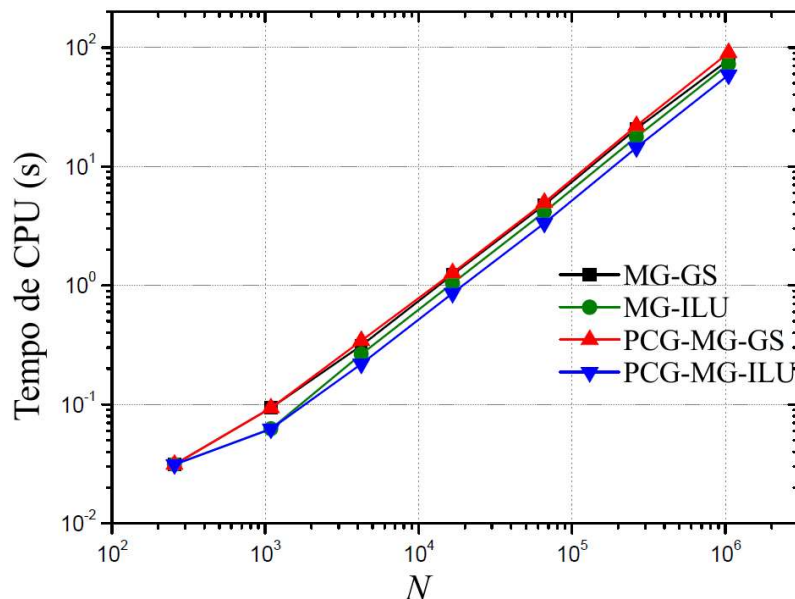


Figura 7.8: Tempo de CPU (em segundos) versus tamanho do problema ( $N$ ).

A Tab. 7.2 apresenta o *Speed-up* (Eq. (7.3)) dos métodos MG-GS, MG-ILU e PCG-MG-GS em relação ao método PCG-MG-ILU. Nesta tabela, pode-se confirmar que os tempos de CPU estão próximos entre si, mas há um ganho com o uso do PCG-MG-ILU, ou seja, o método que mais acelerou a convergência do processo iterativo para o problema apresentado.

**Tabela 7.2: *Speed-up* de MG-GS, MG-ILU e PCG-MG-GS em relação a PCG-MG-ILU ( $u$  e  $v$ )**

$N$	MG-GS	MG-ILU	PCG-MG-GS
16x16	1	1	1
32x32	1,5	1	1,5
64x64	1,428	1,214	1,571
128x128	1,436	1,218	1,490
256x256	1,425	1,242	1,495
512x512	1,443	1,230	1,524
1024x1024	1,537	1,228	1,535

## 7.4 ALGORITMO

Após os testes das duas fases anteriores (seções 7.2 e 7.3), cujo objetivo era identificar os melhores métodos para resolução das equações para as variáveis  $p$  (equação de Poisson) e  $u$  e  $v$  (equações de Reação-Difusão), chegamos ao ponto, onde os melhores métodos foram usados simultaneamente para resolver as equações de Navier-Stokes.

Os resultados apresentados a seguir são comparados com o método Gauss-Seidel clássico (GS) em sua versão *Singlegrid* (método de malha única) para que possa ser mensurado os ganhos ao se usar o algoritmo proposto (adaptação do método de Projeção apresentado no Algoritmo 5.1), ou seja, usando o *solver* PCG-MG-ILU na resolução dos sistemas lineares dados nos passos 1 e 2 presentes no Algoritmo 5.1:

A Fig. 7.9 apresenta o comportamento da norma  $l_2$  do resíduo adimensionalizada pela estimativa inicial em função do número de iterações para o problema com  $N = 128 \times 128$  volumes para as variáveis  $u$ ,  $v$  e  $p$ . Baseado nesta figura, pode-se perceber que o método PCG-MG-ILU atingiu o critério de parada  $\varepsilon = 10^{-10}$  em um número de iterações extremamente menor, tanto para  $p$  quanto para  $u$  e  $v$ .

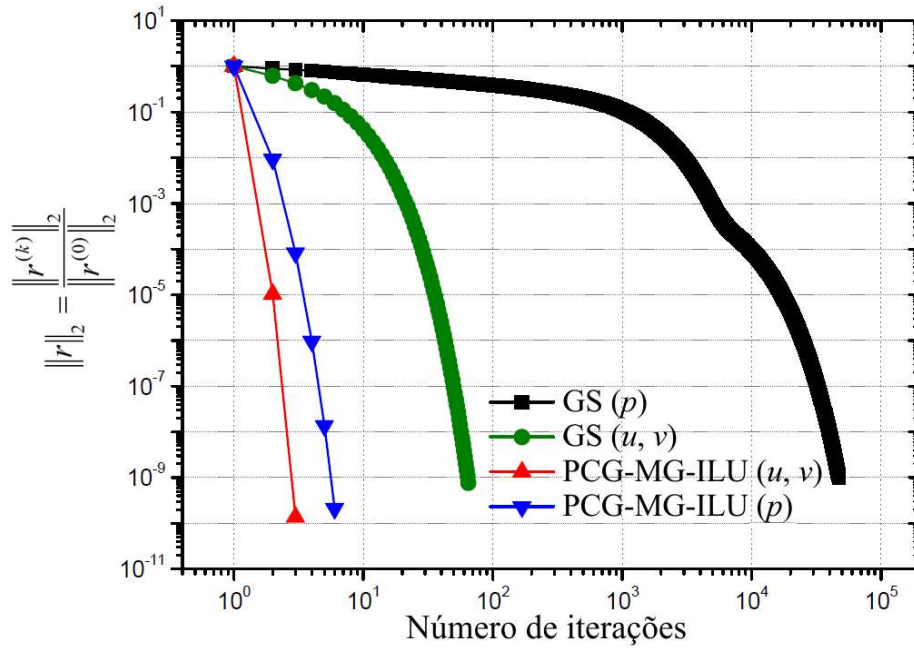


Figura 7.9: Norma  $l_2$  do resíduo adimensionalizada pela norma  $l_2$  da estimativa inicial *versus* número de iterações para o problema com  $N = 128 \times 128$  para  $u$ ,  $v$  e  $p$ .

A Fig. 7.10 ilustra o comportamento do fator de convergência empírico com o aumento do tamanho do problema. Com base nesta figura, pode-se concluir que o método PCG-MG-ILU apresentou resultados muito melhores para os fatores de convergência para as três variáveis de interesse, em comparação com o método clássico GS.

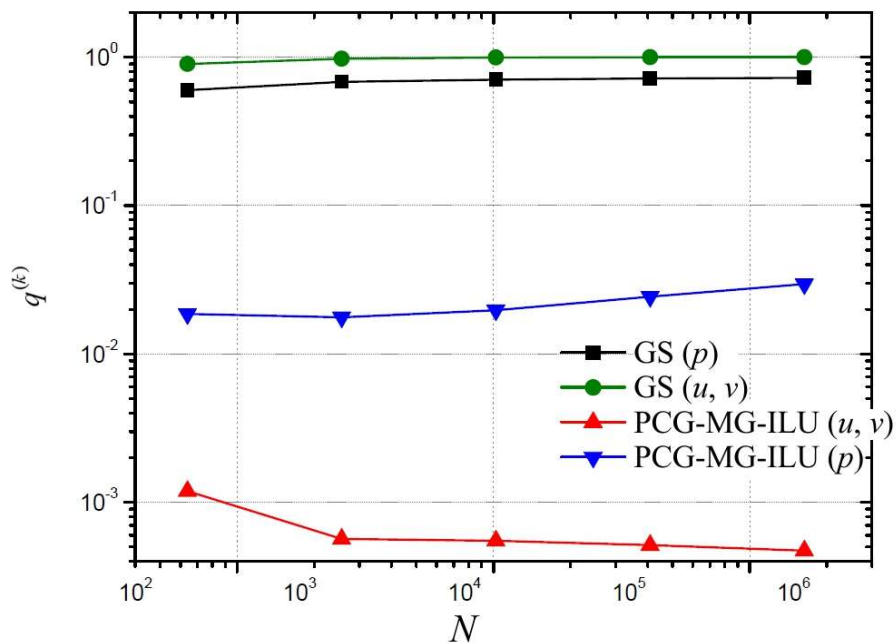


Figura 7.10: Fator de convergência empírico ( $q^{(k)}$ ) *versus* tamanho do problema ( $N$ ) para  $u$ ,  $v$  e  $p$ .



A Fig. 7.11 contém os valores dos tempos de CPU (em segundos) das simulações com o aumento do tamanho do problema. Com base nesta figura, percebe-se que a metodologia PCG-MG-ILU foi a que convergiu mais rapidamente, sendo bastante evidente a diferença de tempo de CPU entre a metodologia proposta e a metodologia usando o método GS clássico.

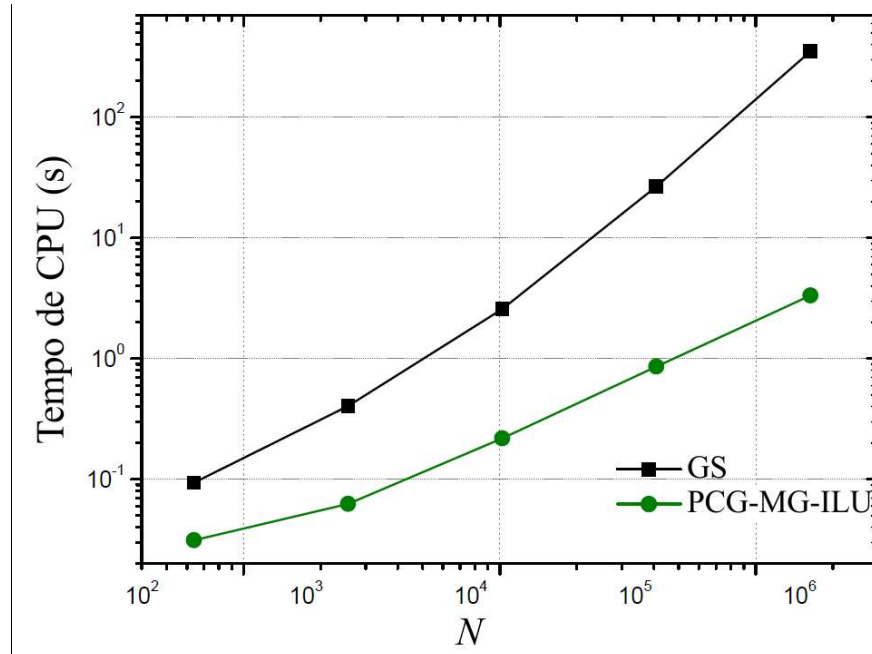


Figura 7.11: Tempo de CPU (em segundos) versus tamanho do problema ( $N$ ).

A Tab. 7.3 apresenta o *Speed-up* (Eq.(7.3)) do método GS em relação ao método PCG-MG-ILU. De acordo com os dados nesta tabela, a metodologia que usa o método PCG-MG-ILU mostrou-se muito mais eficiente que a metodologia que usa o método GS, chegando a ser 105 vezes mais rápido para o maior problema comparado nesta tabela. Pode-se perceber também que o *Speed-up* vai aumentando à medida que o problema aumenta de tamanho, o que é uma propriedade fortemente desejável.

Tabela 7.3: *Speed-up* de GS em relação a PCG-MG-ILU

$N$	$S_p$
8x8	3,013
16x16	6,504
32x32	11,785
64x64	31,181
128x128	105,242

Outro estudo complementar pode ser feito através do comparativo da complexidade de algoritmos utilizando os diferentes métodos. Para a análise de complexidade de tais algoritmos, calculou-se o expoente  $\rho$ , obtido pelo método dos mínimos quadrados, para a função dada por

$$t_{CPU}(N) = cN^\rho, \quad (7.4)$$

onde  $\rho$  representa a ordem do *solver* associado ao método empregado e  $c$  é um coeficiente que depende de cada método e cada *solver*,  $N$  é o número de incógnitas do sistema e  $t_{CPU}$ , o tempo de CPU.

Para o método MG ideal,  $\rho = 1$ , significando que o esforço computacional cresce linearmente com o tamanho da malha (BRANDT, 1977; TROTTEBERG et al., 2001). Assim, para um dado hardware e compilador, quanto mais próximo  $\rho$  for da unidade, mais eficiente é o algoritmo e quanto menor o valor de  $c$ , mais rápido ele é.

A Tab. 7.4 apresenta os valores de  $\rho$  e  $c$  dos ajustes de curvas obtidos para os métodos em estudo (dados da Fig. 6.11). Nesta tabela observa-se que o valor de  $\rho \approx 1$  para PCG-MG-ILU, sendo  $\rho \approx 2$  para GS, conforme esperado pela literatura (TROTTEBERG, 2001). Além disso, o menor valor para  $c$  aparece para PCG-MG-ILU.

**Tabela 7.4: Valores de  $\rho$  e  $c$  para os algoritmos das metodologias em estudo**

<b>Metodologia</b>	<b><math>c</math></b>	<b><math>\rho</math></b>
GS	5,332E-04	1,855
PCG-MG-ILU	4,272E-05	0,984

## 8 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi resolvido um problema de escoamento laminar bidimensional de um fluido incompressível, isotérmico e em regime transiente, dado pelas equações de Navier-Stokes usando-se um método de Projeção com o intuito de se obter as variáveis primárias  $u$ ,  $v$  e  $p$ . Foi usado o método dos Volumes Finitos em malhas desencontradas no processo de discretização, gerando sistemas de equações lineares que foram resolvidos empregando-se o método *Multigrid* Geométrico e algumas combinações com diferentes *solvers*. Foram realizados testes numéricos para o problema Vórtices de Taylor-Green que possui solução analítica conhecida.

### 8.1 CONSTATAÇÕES GERAIS

Com base nos resultados obtidos, verificou-se que:

- 1) As equações de Navier-Stokes foram resolvidas numericamente de maneira satisfatória com todas as metodologias estudadas e o uso do método de Projeção.
- 2) O algoritmo que contempla o método PCG-MG-ILU na resolução dos sistemas oriundos da pressão e das velocidades, apresentou os melhores resultados às metodologias comparadas neste trabalho.
- 3) O método PCG-MG-ILU converge com poucas iterações.
- 4) O método PCG-MG-ILU possui os melhores valores do fator de convergência empírico.
- 5) O método PCG-MG-ILU possui *Speed-ups* satisfatórios, assim como fatores de complexidade.
- 6) O tempo computacional foi reduzido, por exemplo, em até 105 vezes para o problema com  $N = 128 \times 128$  em relação a um método clássico, e percebeu-se uma tendência de melhora desse fator (*Speed-up*) com o aumento do tamanho do problema, propriedade bastante desejável

### 8.2 CONTRIBUIÇÕES

Este trabalho contribui com a literatura no sentido que:

- 1) Desenvolve um novo algoritmo utilizado para resolver numericamente as equações de Navier-Stokes discretizadas usando um método de Projeção.

2) Apresenta o método Gradiente Conjugado pré-condicionado com o método *Multigrid* utilizando o *solver* ILU como uma boa alternativa para resolver, tanto a equação de Poisson quanto a Equação de Reação-difusão que aparecem no uso dos métodos de Projeção para a solução das equações de Navier-Stokes;

3) Para o problema resolvido, a nova metodologia apresentou as melhores taxas de convergência em relação aos métodos existentes na literatura.

### 8.3 TRABALHOS FUTUROS

Pode-se apresentar como sugestões de trabalhos futuros, os seguintes temas:

1) Utilizar o *solver* PCG-MG-ILU para resolver os sistemas lineares que aparecem na discretização das equações de Navier-Stokes com outros métodos de Projeção de maior acurácia como aqueles propostos por Guermond et al. (2006).

2) Utilizar métodos de Projeção com correção na velocidade, cujas etapas de correção são invertidas em relação ao utilizado neste trabalho. Isto pode apresentar vantagem, tendo em vista que a etapa de correção na velocidade possui maior custo computacional.

3) Utilizar metodologias de paralelização no tempo para o método de Projeção utilizado e o método *Multigrid*, além de paralelização espacial para atualização da pressão, associados ao *solver* PCG-MG-ILU.

4) Resolver problemas mais complexos, sejam eles pela geometria envolvida, seja pelos parâmetros utilizados no problema, como outros números de Reynolds, por exemplo ou o problema da cavidade com a tampa deslizante (GHIA et al., 1982).

## REFERÊNCIAS

ALMGREN, A. S.; BELL, J. B.; COLELLA, P. e HOWELL, L. H. *Adaptive projection method for the incompressible Euler equations*. **Proceedings** in Eleventh AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, 1993

ALMGREN, A. S.; BELL, J. B. e SYZMCZAK, W. G. *A numerical method for the incompressible Navier-Stokes equations based on an approximate projection*. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 17, n. 2, p. 358-369, 1996.

ALMGREN A. S.; ASPDEN, A. J.; BELL, J. B. e MINION, M. L. *On the use of higher-order projection methods for incompressible turbulent flow*. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 35, n. 1, p. 25-42, 2013.

ANUNCIAÇÃO, M. A. M.; PINTO, M. A. V. e NEUNDORF, R. L. Análise de parâmetros do método Gradiente Conjugado pré-condicionado com *Multigrid* para a equação de Poisson bidimensional, In XXXVIII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE). **Proceedings** Florianópolis, 2017.

ASTORINO, M. e GRANDMONT, C. *Convergence analysis of a projection semi-implicit coupling scheme for fluid-structure interaction problems*, **Numer. Math.**, v. 116, p. 721-767, 2010.

BATCHELOR, G. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1970.

BELL, J. B.; COLLELA, P. e GLAZ, H. M. *A second order projection for the incompressible Navier-Stokes equations*. **Journal of Computational Physics**, v. 85, n. 2, p. 257-283, 1989.

BRANDT, A. *Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems*. **Mathematics of Computation**, v. 31, p. 333-390, 1977.

BRANDT, A. e MIKULINSKY, V., *Recombining iterants in Multigrid algorithms and problems with small islands*. **SIAM J. Sci. Comput.** v.16, p. 20-28, 1995.

BREBBIA, C. A.; TELLES J. C. F. e WROBEL, L. C. *Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering*. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E. e MCCORMICK, S. F. *A Multigrid Tutorial*, 2 ed. Philadelphia: SIAM, 2000.

BROWN, D. L.; CORTEZ, R. e MINION, M. L. *Accurate projection methods for the incompressible Navier-Stokes equations*, **Journal of Computational Physics**, v. 168, n. 2, p. 464-499, 2001.

BURDEN, R. L. e FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. 9 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2010.

CHAPRA, S. C. e CANALE, R. P. *Introduction to Computing for Engineers*, 5 ed. New York: Mc-Graw-Hill, 2008.

CHORIN, A. J. *Numerical solution of the Navier-Stokes equations*. **Mathematics of Computation**, v. 22, n. 104, p. 745-762, 1968.

CHORIN, A. e MARSDEN J. E. *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Springer, 2000.

CUNHA, C. **Métodos Numéricos**, 2 ed. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2003.

DEBREU, L.; NEVEU, E.; SIMON, E.; LE DIMET, F. X. e VIDARD, A. *Multigrid solvers and Multigrid preconditioners for the solution of variational data assimilation problems*. **Quarterly journal of the Royal Meteorological Society**, v. 142, p. 515-528, 2015.

DEVENDRAN, D.; CORONA, E. *Projection Methods*, **Computational Fluid Dynamics Reading Group**, Courant Institute of Mathematical Sciences of New York University, New York, 2009.

ERNST, O. G. e GANDER, M. J. *Why it is Difficult to Solve Helmholtz Problems with Classical Iterative Methods?* **Computational Science and Engineering**, v. 83. p. 325-363, 2012.

FEDORENKO, R. P. *On the Speed of Convergence of an Iteration Process*, **USSR Comput. Math. And Math. Phys.**, v. 4, n. 3, 1964.

FERZIGER, J. H. e PERIC, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

FLETCHER, C. A. J. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. v.1, 2 ed. Berlin: Springer. 1992.

FORTUNA, A. O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica de Fluidos**. São Paulo: Edusp, 2000.

FRANCO, S. R.; GASPAR, F. J.; PINTO, M. A. V. e RODRIGO, C. *Multigrid method based on a space-time approach with standard coarsening for Parabolic problems*. **Applied Mathematics and Computation**, v. 317, p. 25-34, 2018.

GALANTE, G. **Métodos *Multigrid* Paralelos em Malhas Não-Estruturadas Aplicados à Simulação de Problemas de Dinâmica de Fluidos Computacional e Transferência de Calor**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

GHIA, U.; GHIA, N. e SHIN, C. *High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a Multigrid method*. **Journal of Computational Physics**, v. 48, p. 387-411, 1982.

GODA, K. *A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two-or three-dimensional cavity flows*. **Journal of Computational Physics**, v. 30, n. 1, p 76-95, 1979.

GOLUB, G. e ORTEGA, J. M., *Conjugate Gradient-Type Methods*. **Scientific Computing**, p. 371-41, 1993.

GONÇALVES, S. F. T. **Estudo de parâmetros do método *Multigrid* geométrico para equações 2D em CFD e volumes finitos**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

GRESHO, P. M. e SANI, R. L. *On pressure boundary conditions for incompressible Navier–Stokes equations*. **International Journal for Numerical Methods in Fluids** v. 10, p. 1111–1145, 1987.

GRIFFITH, B. E. *An accurate and efficient method for the incompressible Navier–Stokes equations using the projection method as a preconditioner*. **Journal of Computational Physics**, v. 228, n. 8, p. 7565–7595, 2009.

GUERMOND, J. L. e SHEN, J. *Quelques résultats nouveaux sur les méthodes de projection*. **CR Acad. Sci. Paris, Série I**, v. 333, p. 1111–1116, 2001.

GUERMOND, J. L. e SHEN, J. *Velocity-correction projection methods for incompressible flows*. **SIAM J.**, v. 41, n. 1, p. 112–134, 2003.

GUERMOND, J.L. e SHEN, J. *On the error estimates for the rotational pressure-correction projection methods*, **Math. Comput.**, v. 73, n. 248, p. 1719–1737, 2004.

GUERMOND, J.L.; MINEV, P. e SHEN, J. *An overview of projection methods for incompressible flows*. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 44–47, p. 6011–6045, 2006.

GUERMOND, J. L. e SALGADO, A. *A splitting method for incompressible flows with variable density based on a pressure Poisson equation*, **Journal of Computational Physics**, v. 228, n. 8, p. 2834–2846, 2009.

HACKBUSH W. **Multigrid Methods and Applications**. Berlin: Springer-Verlag, 1985.

HAFNER, S. e KONKE, C. *Multigrid preconditioned conjugate gradient method in the mechanical analysis of heterogeneous solids*. In 17<sup>a</sup> International Conference on the Application of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering, **proceedings** Weimar, Germany, 2006.

HARLOW, F. H. e WELCH, J. E. *Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface*, **The Physics of Fluids**, v. 8, p. 2182–2189, 1965.



HESTENES, M.R. e STIEFEL, E. *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*. **J. Res. Nat. Bur. Stand. Sect. B**, v. 49, p. 409-436, 1952.

HIRSCH, C. *Numerical Computational of Internal and External Flows*, v.1. New York: John Wiley & Sons, 1988.

HUGHES, W. F. e BRIGHTON, J. A. **Dinâmica dos Fluidos**, 1967.

HUGHES, T. J. R. *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamics Finite Element Analysis*, Mineola: Dover Publications Inc., 2000.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P. BERGMAN, T.L. e LAVINE, A. S. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**, 6 ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2008.

IWAMURA, C.; COSTA, F.C.; SBARSKI, I.; EASTON, A. e LI. N. *An efficient algebraic Multigrid preconditioned conjugate gradient solver*. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.** v. 192, p. 2299-2318, 2003.

KADIOGLU, S. Y.; KLEIN, R. e MINION, M. L. A. *Fourth- Order Auxiliary Variable Projection Methods for Zero Mach-Number Gas Dynamics*. **Journal on Scientific Computing**, v. 227, n. 3, p. 2012-2043, 2008.

KALLAND, K. *A Navier-stokes solver for single and two-phase flow*, Master's thesis, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Master Thesis, University of Oslo, 2008.

KARNIADAKIS, G. E.; ISRAELI, M. e ORSZAG, S. A., *High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations*. **Journal of Computational Physics**, v. 97, n. 2, p. 414-443, 1991.

KETTLER, R., *Analysis and comparison of relaxation schemes in robust Multigrid and preconditioned conjugate gradient methods*, Lecture Notes in Mathematics 960 (eds W. Hackbusch and U. Trottenberg). P. 502-534. Springer, Berlin, 1982.

KIM, J. e MOIN, P. *Application of a fractional-step method to incompressible Navier- Stokes equations*, **Journal of Computational Physics**, v. 59, n.2, p. 308-323, 1985.

JIMACK, P. K. *Applications of Multigrid techniques in CFD*. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 1, p. 1112, 2007.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. 2 ed., Rio de Janeiro: LTC editora, 2004.

MEIJERINK, J. e VAN DER VORST, H., *An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix*. **Math. Comp.**, v. 31, p. 148-162, 1977.

MITIN, A. V. *Linear extrapolation in an iterative method for solving systems of equations*, **U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys.**, v. 25, n. 2, p. 1-6, 1985.

NEUNDORF, R. L. A.; PINTO, M. A. V.; ARAKI, L. K. E CALVETTI, L. Desempenho de um algoritmo Multigrid paralelo aplicado às equações de Navier-Stokes. In XXXVIII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE). **Proceedings**, Brasília, 2016.

OLIVEIRA, F. **Efeitos de malhas anisotrópicas bidimensionais sobre o desempenho do método *Multigrid* geométrico**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2010.

OLIVEIRA, F.; PINTO, M. A. V.; MARCHI, C. H. e ARAKI, L. K. *Optimized partial semicoarsening Multigrid algorithm for heat diffusion problems and anisotropic grids*. **Applied Mathematical Modelling**, v. 36, p. 4665-4676, 2012.

OLIVEIRA, F.; FRANCO, S. R. e PINTO, M. A. V. *The effect of Multigrid parameters in a 3D heat diffusion*. **Int. J. of Applied Mechanics and Engineering**, v. 23, n.1, p.213-221, 2018.

OLIVEIRA, F.; PINTO, M. A. V.; GONÇALVES, S. F. T. e RUTZ, G. V. *On the Robustness of the xy-Zebra-Gauss-Seidel Smoother on an Anisotropic Diffusion Problem*. **Computer Modeling Engineering & Science**, v.117, n.2, p. 251-270, 2018.

ORSZAG, S. A.; ISRAELI, M. e DEVILLE, M. *Boundary conditions for incompressible flows*. **Journal of Scientific Computing**, v. 1, n. 1, p. 75-111, 1986.

- OSELEDETS, V. I. *On a new way of writing the Navier-Stokes equation: The Hamiltonian formalism*. **Communications of the Moscow Mathematical Society**, v. 44(1), p. 210-211, 1989.
- PANTON, R. L. *Incompressible flow*. John Wiley & Sons, 1984.
- PATANKAR, S. *Numerical heat transfer and fluid flow*. New York: Taylor and Francis, 1980.
- PEARSON, C. E. *A computational method for time dependent two dimensional incompressible viscous flow problems*, Sperry-Rand Research Center, 1964.
- PEYRET, R. e TAYLOR, T. D. *Computational Methods for Fluids Flow*. Springer-Verlag, 1983.
- PFLAUM, C. *A Multigrid conjugate gradient method*. **Applied Numerical Mathematics**, v. 58, p. 1803-1817, 2008.
- PINTO, M. A. V. **Comportamento do Método Multigrid Geométrico em Problemas de Transferência de Calor**. Tese (Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.
- PINTO, M. A. V. e MARCHI, C. H. *Optimum parameters of a geometric Multigrid for the two-dimensional Laplace's equation*. In 19th International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2007). **Proceedings Brasília**, 2007.
- PINTO, M. A. V.; RODRIGO, C.; GASPAR, F. J. e OOSTERLEE, C. W. *On the robustness of ILU smoothers on triangular grids*. **Applied Numerical Mathematics**, v. 106, p. 37-52, 2016.
- PRITCHARD, P. e MITCHELL, J. *Fox and McDonald's Introduction to Fluid Mechanics*, 9 ed. Wiley, 2015.
- REDDYE, J. N. e GARTLING, D. K. *The finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, Boca Raton (USA): CRC Press, 1994.

REIS, G. A.; TASSO, I. V. M.; SOUZA, L. F. e CUMINATO, J. A. Um novo tipo de método de Projeção com Diferenças Finitas compactas de alta ordem. In Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, **Proceedings** São Carlos, São Paulo, 2016.

ROACHE, P. J. *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. Albuquerque, New Mexico: Hermosa Publishers, 1998.

RUTZ, G. V.; PINTO, M. A. V. e GONÇALVES, S. F. T. *On the robustness of the multigrid method combining ILU and Partial Weight applied in an orthotropic diffusion problem*. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. v. 35, n.1, p. 1-23, 2019.

SAAD, Y. *Iterative Methods for sparse linear systems*. SIAM, 2003

SANTIAGO, C. D. e MARCHI, C. H. *Optimum Parameters of a Geometric Multigrid for a Two-Dimensional Problem of Two-Equations*, In 19th International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2007). **Proceedings** Brasília, 2007.

SANTIAGO, C. D.; MARCHI, C. H. e SOUZA, L. F. *Performance of geometric Multigrid method for coupled two-dimensional systems in CFD*. **Applied Mathematical Modelling**, v. 39, p. 2602-2616, 2015.

SANTIAGO, C. D. **Estudo de parâmetros do método *Multigrid* para sistemas de equações 2D em CFD**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2010.

SCHNEIDER, G, E. e ZEDAN, M. *A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problems*. **Numerical Heat Transfer**, v.4, p. 1-19, 1981.

STEWART, J.: **Cálculo**, v. 2, 7 ed. Pioneira Thomson Learning, 2013.

SUERO, R.; PINTO, M. A. V.; MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K. e ALVES, A. C. *Analysis of algebraic Multigrid parameters for two-dimensional steady-state heat diffusion equations*. **Applied Mathematical Modelling**, v. 36, p. 2996-3006, 2012.

SUERO, R. **Otimização de parâmetros do método *Multigrid* algébrico para problemas difusivos bidimensionais**. Tese (Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia). Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2010.

TANNEHILL, J. C., ANDERSON, D. A. e PLETCHER, R. H. ***Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer***, Washington: Taylor & Francis, 1997.

TEMAM, R. *Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des fractionnaires*. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 33, n. 5, p. 377-385, 1969.

TIMMERMANS, L., J., P.; MINEV, P. D. e VAN DE VOSSE, F., N. *An approximate projection scheme for incompressible flow using spectral elements*, **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 22, n. 7, p. 673-688, 1996.

TRALES. P. R. Uma Metodologia para a resolução das equações de Navier-Stokes via Elementos Finitos com aceleração *Multigrid*. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo e Desenho e Engenharia**, v. 17, n. 3, p. 255-284, 2001.

TROTTEBERG, U.; OOSTERLEE, C. e SCHÜLLER, A. ***Multigrid***, St Augustin, Germany: Academic Press, 2001.

VAN KAN, J., *A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow*, **SIAM J. Sci. Stat. Comput**, v. 7, n. 3, p. 870-891, 1986.

VAN DER VORST, H. *BICGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of non-symmetric linear systems*. **SIAM J. Sci. Comput**. v. 13, p. 31-644, 1992.

VARGAS, A. P. S. Multiextrapolação de Richardson e esquemas de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> ordens, mistos e Crank-Nicolson sobre as equações 2D de Advecção-Difusão e Fourier. Tese (Doutorado), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2013.

VERSTEEG, H. K. e MALALASEKERA, W. ***An introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method***, 2 ed., Harlow, England: Pearson/Prentice Hall, 2007.

VILLAR, M. M. **Análise Numérica Detalhada de Escoamentos Multifásicos Bidimensionais**. Tese (Doutorado), Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2007.

WAN, X. e LI, Z. *Some new Finite Difference Methods for Helmholtz equations on irregular domains or with interfaces*. **Discrete Continuous Dyn Syst Ser B**, v. 17(4), p. 1155-1174, 2012.

WANG, Y.; BABOULIN, M.; RUPP, K.; MAITRE, O. e FRAIGNEAU, Y. *Solving 3D incompressible Navier-Stokes equations on hybrid CPU/GPU systems*. In High Performance Computing Symposium. **Proceedings**, Tampa, Florida, 2014.

WANG, H. e NIE, Y. *A Multigrid preconditioned algorithm for 8-node hexahedron combined hybrid element*. In 3rd International Conference on Advances in Energy, Environment and Chemical Engineering, **Proceedings**, Xi'an, P. R. China, 2017.

WESSELING, P. **An introduction to Multigrid Methods**, Flourtown: R.T. Edwards, Inc., 2004.

WESSELING, P. e OOSTERLEE, C. W. *Geometric Multigrid with Applications to Computational Fluid Dynamics*, **Journal of Computation and Applied Mathematics**, v. 128, p. 311-334, 2001.

WHITE, F.M. **Viscous Fluid Flow**, McGraw Hill, 1974.

ZHANG, J. *Multigrid Method and Fourth-Order Compact Scheme for 2D Poisson Equation with Unequal Mesh-Size Discretization*. **Journal of Computational Physics**, v. 179, p. 170-179, 2002.

ZHANG, Q. *A fourth-order approximate projection method for the incompressible Navier–Stokes equations on locally-refined periodic domains*. **Applied Numerical Mathematics**, v. 77, p. 16-30, 2014.

